数学Essay_374　　数専ゼミ・山形東原教室

誤答事例集 014【高校数学Ⅱ】

三角関数の加法定理 ｜ 三角関数の最大・最小

▶ 2023.6.9(金)

三角関数の最大・最小(誤答例)

三角関数を合成して関数の最大値，最小値を求める問題の誤答例です。

★演習★【１】

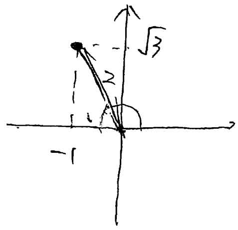
　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，$y = -\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta$ の最大値と最小値を求めなさい。また，そのときの θ の値を求めなさい。

[考える手順]　[答　案]

1 三角関数の合成

$y = -\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta$

$= 2\sin\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right)$



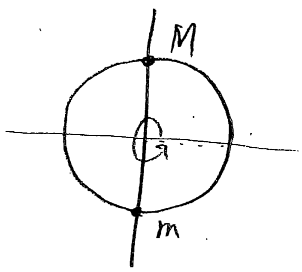
2 合成後の範囲

$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$ より，

$-\frac{2}{3}\pi \leqq \sin\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right) \leqq \frac{2}{3}\pi$

$-\frac{4}{3}\pi \leqq 2\sin\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right) \leqq \frac{4}{3}\pi$

3 その範囲内での最大値，最小値



4 θ の値と最大値，最小値

よって，$\theta + \frac{2}{3}\pi = \frac{\pi}{2}$ すなわち，$\theta = -\frac{\pi}{6}$ で最大値 $\frac{4}{3}\pi$

$\theta + \frac{2}{3}\pi = \frac{3}{2}\pi$ すなわち $\theta = \frac{5}{6}\pi$ で最小値 $-\frac{4}{3}\pi$

//

解法プロセスの全体の流れは単純なのですが，操作の１つ１つが何をしているのかをきちんと理解していないと，答案はとんでもない方向へ行ってしまいます。

その典型的な例です。

解法の全体の流れは，左端にコメントしてあり，この問題の前に，例題を学習し，理解のチェックの問題を解いているので，ふつうですと，このような問題は難なく解けるはずなのですが，”思い違い”があると，上のような”唯我独尊”の答案を作ります。

三角関数の合成

異なった三角関数を含む関数では，最大値・最小値の問題と解くときには
１つの関数に合成する，というのが鉄則です。
鉄則というよりも，２種類の三角関数を含んでいる関数の式を見ていても，な～んもすることができないわけですから，”何かをせねば”と思うのが普通です。
”何か”といえば，三角関数ですから，合成しかないわけです。
このように考えると，$\boxed{1}$のプロセスは，だれでも思いつく”手”です。
上の答案でも正しく書いてあります。

角の範囲の更新

$\boxed{2}$の”合成後の範囲”というのは，”角の範囲の更新”のことです。
これは”おきかえ”の一般ルールです。
どの分野であっても，変数の範囲をおきかえたときは，その範囲を更新する，というのが鉄則です。
この問題では，合成して角を”おきかえた”ので，与えられた角（$0 \leqq \theta < 2\pi$）の範囲を更新しなくてはなりません。
上の答案では，角ではなく，関数の値（$\sin\theta$）を更新しています。
しかし，$\sin\theta$の値など”更新”できないわけで，できないことを”できる”にしようとするものだから，不等式の解き方を“唯我独尊”ルールでこじつけています。
上の答案では，不等式の辺々に$\frac{3}{2}\pi$かけていますが，なぜ$\frac{3}{2}\pi$をかけるかを説明できません。
だから，これ以降はすべてまちがいになります。
部分点でも５点満点の１点程度です。

最大値・最小値をとるときのθの値が”変”！

こじつけた答案ですから，結論もありえない数値がでます。
上の答案の$\boxed{4}$で，”$\theta = -\frac{\pi}{6}$で…”と書いていますが，問題の１行目に”$0 \leqq \theta < 2\pi$のとき”と書いてあるのに，これを無視しています。あるいは，気づいていません。
全体の解き方の流れがまちがっているので，定義外のθが現れることがあります。
”なんか範囲を変えるんだ”というような抽象的な理解で答案を作っていることがまちがいの原因と思われます。

この答案を書いた生徒は，同様な【考え方】で解く問題３題のうち２題をまちがっています。
まだ，あまりよく理解していないことがわかります。
このタイプの問題は，全部で５題学習しましたが，次回に最初から学習をやりなおす必要があり

ます。解けたからいいのではなく，解けたことを確認する数専ゼミの徹底指導です。
上の問題では，

もう1つの困難さ

三角関数を合成したことにより，$0 \leqq \theta < 2\pi$ であった角の範囲が

$$\frac{2}{3}\pi \leqq \theta + \frac{2}{3}\pi < \frac{8}{3}\pi$$ となり，

合成した関数の角は，$\theta = \frac{2}{3}\pi$ からスタートすることになります。

だから，関数ｙは，$\theta = \frac{\pi}{2}$ のときではなく，$\theta = \frac{5}{2}\pi$ のときに最大値をとることになります。

多くの生徒は，$\boxed{1}$～$\boxed{3}$までを正しく導いても，最後の詰めの段階で，$\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき最大値２をとると答えてしまいます。

変域が $\frac{8}{3}\pi$ までですから，変域は単位円の１周で，最大値は１つですが，

変域が $\frac{14}{3}\pi$ までとなると，最大値は $\theta = \frac{5}{2}\pi$ のときと $\theta = \frac{9}{2}\pi$ のときの２個でてきます。

こういう”動的な”事態を理解できない生徒が多数おります。

”本質”を表す図が正解へ導いてくれる！

単位円を正確にかくことによって，これらの状況が”見える”ようになります。
数値だけを追っていってもこうした特殊な事態を読み取れない場合があります。

上の答案を見ると，単位円に角についてのデータが書き込まれていません。
だから，この問題の合成後の角の範囲の特殊性を読み取ることができなかったのです。

この問題を解く前に学習した例題では，
単位円で角の動きを書き入れるように指導していますし，
チェック問題でも，単位円で角の動きを書き入れるフォームになっています。
これらの意味をおさえられないと，三角関数の最大値・最小値の問題では
攪乱条件に左右され，安定して正解することはできません。

数学のすべての領域についていえることですが，
”本質を表す”図は，それを正確にかくならば，まちがいなく正解に導いてくれます。
ただ，安易で，事態の本質を表していない図は，じゃまなだけで，問題が複雑になると何の役にも立たなくなることを知っておく必要があります。
速さにおける”はじき”，割合における”くもわ”などのことです。
こんな図を使うんなら，ことばで公式を覚え，それを使って解いた方が，ずっと応用力はありますし，まちがいません。

高校数学Ⅱ・三角関数の加法定理　No.１２　体験学習

３　三角関数の合成（その２）

■　三角関数の最大・最小　■

★スマホの機種によっては，体験学習へのリンクができないものがあります。その場合には，PCでご覧下さい★

■演習問題は，数専ゼミ・山形・東原教室で個人指導を受けることができます■

■「高校数学Ⅱ・三角関数の加法定理」★　学習計画書　★

（ブラウザのバック矢印でこの文書に戻ることができます。）

三角関数は"単位円"に教えてもらうことを教える

数専ゼミ・山形東原教室

〒990－0034　山形市東原町二丁目10番8号

TEL:(023)633－1086　／　FAX.(023)633－1094

メールアドレス：　suusen@seagreen.ocn.ne.jp