数学Essay_372　　数専ゼミ・山形東原教室

体験学習をどうぞ 112

▶ 2023.6.6(火)

【高校数学Ｂ】

漸化式と数学的帰納法　｜　ｎ乗を含む漸化式（その３）

漸化式を学ぶときにはいつでも，学習を始める前に，
そのタイプの漸化式の漸化式全体の中の位置を確認して下さい。

詳しくは，こちら　→ Link｜《漸化式ナビ_Ver3》｜

"n乗型漸化式"の2つの解法

問題が与えられたら，これは"ｎ乗型"と言えるようになりましたか。

ｎ乗型漸化式の一般形は，$a_{n+1}=pa_n+q\cdot r^n$　です。
この型には，次の２つのタイプがあります。

Ⅰ　ｎ乗型→特性方程式型→等比型→一般項　　　$p\neq r$ のとき
Ⅱ　ｎ乗型→等差型→一般項　　　$p=r$ のとき

前回は，ｎ乗型漸化式第Ⅰタイプの解法を学習しました。
Ⅰ　ｎ乗型→特性方程式型→等比型→一般項　　（$p\neq r$ のとき）
これが，Ⅰタイプの問題を解くヒューリスティックスでしたね。

したがって，きょうは
ｎ乗型漸化式の第Ⅱタイプの学習ということになります。
Ⅱ　ｎ乗型→等差型→一般項　　（$p=r$ のとき）
これが，Ⅱタイプの問題を解くヒューリスティックスです。

ｎ乗型漸化式の第Ⅱタイプも，第Ⅰタイプと同じく，次の２つのステップで解きます。

Ⅱ　ｎ乗型　→等差型→一般項　　（$p=r$ のとき）
　　第１ステップ　第２ステップ

"n乗型漸化式"の解法（第Ⅱタイプ）

第１ステップは，

所与の漸化式が，ｎ乗型漸化式だ，と判別できたら迷わず，

$$a_{n+1}=pa_n+q\cdot r^n$$

の両辺を r^{n+1} で割ります。

【注】 r^{n-1} のときでも，r^{n+1} のときでも，r^{n+1}で割ります。
理由は，漸化式（ｎ＋１とｎの項）を作る必要があるからです。

「第１タイプなのかな，第Ⅱタイプなのかな」などと考える必要はありません。
とにかく，ｎ乗型漸化式は両辺を r^{n+1}で割ります。
割ってみると，第Ⅰタイプなのか，第Ⅱタイプなのかが自然と現れてきます。

両辺を r^{n+1}で割ると，ｐ＝ｒのときは，$a_{n+1}=a_n+d$ という形の式になります。
だれが，どのようにやってもこうなります。
ほれ，**等差型**漸化式になりましたがね。
生徒Ａ子：「あいや～っ，
数学ってすっごいねぇ！」
はい，数学は，理路整然と，行く道は決まっているのです。
”やるべきこと”をやると，答えが自動的にでてくる”しかけ”になっているのです。
生徒Ａ子：「ま，そうなんだけど…
その”やるべきこと”がわからんのですがねぇ…。
はい，だから，その”やるべきこと”をお勉強しているのです。

第２ステップは，

等差型漸化式の解法プロセスそのものです。
新しいことはなにもありません。№２で学習したのとまったく同じ解き方をします。

ただ，全体の流れは同じなのですが，ここでは，№２とは異なった解法の技術を使います。
”おきかえ”という技術です。
複雑な式を１文字で置きかえて，全体の解法の流れを見やすくするテクニックですが，
そのためにｎ乗型漸化式では，特有のあらたな難しい解法の技術が必要になる場合があります。
第Ⅱタイプ（ｐ＝ｒのとき）では，

$a_{n+1}=pa_n+q\cdot r^n$ の両辺を r^{n+1}で割ると，

$a_{n+1}=a_n+d$ という形の式になりますが，

このとき，ａは分数式になります。
この分数式を１文字で置きかえるのですが，最後には戻さなければなりません。
このときには，両辺に分母の累乗数をかけるわけですが，指数の計算をする必要がでてきます。
ここが困難をきわめます。かなり高度な指数計算をしなければなりません。
問題によっては，何をしていいかわからないまま，複雑な形で解きっぱなしにして答案を提出する生徒も出ます。
出るのではなく，ほとんどの生徒がそのようにします。
「これって，どうも答えっぽくないなぁ…？」と書いた本人も不思議なこころもちで…

たとえば，$a_n=\frac{10}{3}\cdot 4^{n-1}\cdot 2^n-\frac{5}{6}\cdot 2^n$

などという答えを出してきます。
実は，この式では，いたるところに**２の因数**を含んでいますから，
（１０＝２×５，４＝２×２，６＝２×３など）
この２は指数法則を使ってまとめなければならないのです。

n乗型漸化式の”ネック”－指数法則－

あるいは，ｎ乗型漸化式の”ネック”はこの指数計算であるといってもいいかもしれません。
第１ステップの計算は，慣れればだれでもできるようになりますが，
この指数計算は“慣れる”わけではなく，指数法則の深い理解が必要となります。

上の式は，指数法則を使ってまとめると，次のようになります。

$$a_n=\frac{5}{3}\cdot 2^{3n-1}\cdot 2^n-\frac{5}{3}\cdot 2^{n-1}$$

このまとめるプロセスは理解できますか。
生徒Ａ子：「(@_@)？」
でしょう？

この問題を解けるようになるには，高いレベルまで指数法則の復習をしておく必要があります。
この場合の指数法則が漸化式の”基礎”となります。
基礎は”基本”ではありません。
基礎はかなり難しい場合もあります。
基礎は，軽く考えないようにしましょう。

エピローグ

ｎ乗型漸化式のお勉強は，これでおしまいです。
全体としては，特徴的な解法プロセスをとるので，
他の漸化式の解き方と混乱することはありません。
ただ，ｎ乗型漸化式の解法プロセスに特有の難しさがありますので，それをクリアすることがこの漸化式を征服するコツになります。

・まず，両辺を r^{n+1} で割って，特性方程式型漸化式か等差型漸化式へもちこむときの計算です。
　これは，パターンは１通りしかなので，いくつかの問題をこなしていくうちにできるようになります。
・困難なのは，上で紹介したように，置きかえを戻すときの指数の計算です。
　これは計算パターンなどなく，”漸化式”の問題をいっぱい解いたからといって解けるるようになるという保証はありません。
　はやり数学Ⅱの指数法則に戻り，ハイレベルな問題をこなしていくしか”手”はありません。

漸化式と数学的帰納法　No.５　体験学習
１　漸化式（その４）
■　ｎ乗を含む漸化式　■

★スマホの機種によっては，体験学習へのリンクができないものがあります。その場合には，PCでご覧下さい★

■高校数学Ｂ・「漸化式と数学的帰納法」★　学習計画書　★
（ブラウザのバック矢印でこの文書に戻ることができます。）