数学Essay_367　　　　数専ゼミ・山形東原教室

誤答事例集 012【高校数学Ⅱ】

導関数の応用　｜　関数の値の増加・減少(2)　極大・極小

▶ 2023.5.30(火)

3次関数の極値とグラフ(誤答例)

◇《極大・極小》学力化➡　　／　，

★演習★【３】

次の関数の極値を求めなさい。また，そのグラフをかきなさい。

(1)　$y=x^3-6x^2+9x+1$　　(2)　$f(x)=-x(x^2+3x-9)$

(3)　$y=-x^3+3x^2-3x-5$　　(4)　$f(x)=x^3+2x$

［答　　案］

(4) $f(x)=x^3+2x$

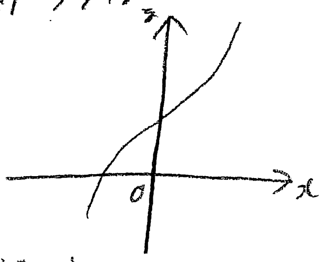
$f'(x)=3x^2+2$

$y'=0$ となるxの値を調べると

$3x^2+2=0$

xの値が必ず0以上だからyの値も2以上になる。

「グラフは



極値なし

なぜ，まちがえたのか

答案のグラフを見た瞬間に”ちがう”というのがわかります。

求めるのは $y=f(x)=x^3+2x$ のグラフです。

$x=0$ のとき，$y=f(0)=0^3+2\times0=0$ ですから，このグラフは原点を通るはずです。

グラフは原点を通っていません。まちがいです。

なぜ，答案のようなグラフをかいたのか。

理由は，この生徒が関数と導関数を混同しているからだと思われます。

問題は，「$f(\chi)=\chi^3+2\chi$ のグラフをかけ。」ですが，
答案には，”$f'(\chi)=3\chi^2+2$”のグラフをかこうとしているふしが見えます。
しかし，このグラフは２次関数だから放物線になるはずです。
はずですが…
下の資料を学習した直後ですから，Ｄ＜０に”誘惑”されています。
その結果，下の資料から，（ⅲ）のパターンを選び，単調増加のグラフをかいたと思われます。
では，ｙ切片はどうなる。
$f'(\chi)$ の式には＋２とあるから，ｙ＝２あたりだろう，となるわけです。
このように考えると，答案のようなグラフができあがります。
導関数を見ながらグラフをかこうとしています。

＊この生徒は，この問題を解くまえに，次のような資料を学習しています。

【１】 $f(\chi)=a\chi^3+b\chi^2+c\chi+d$ （$a>0$）のグラフ

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c \quad (a>0)$$

$f'(x)=0$（2次方程式）の $D=4(b^2-3ac)$ で

(i) $D>0$ のとき　(ii) $D=0$ のとき　(iii) $D<0$ のとき

(i) $f'(x)=3a(x-\alpha)(x-\beta)$

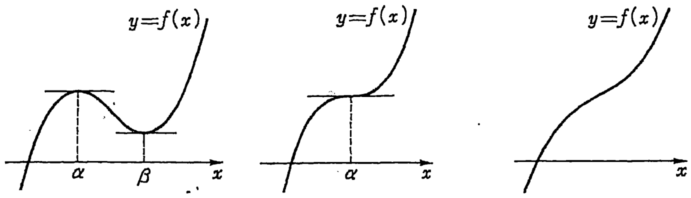
x		α		β	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

(ii) $f'(x)=3a(x-\alpha)^2$

x		α	
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	↗		↗

(iii) $f'(x)>0$

x	
$f'(x)$	+
$f(x)$	↗



例　$y=x^3-3x+5$　　$y=x^3+3$　　$y=x^3+x+3$

”グラフをかくときの基本的な思考の流れ”を押さえなおす必要があります。
Ｄ≦０の場合のような撹乱条件に惑わされることなく，一貫した思考プロセスで答案を作ることができる力をつけることが必要ということです。

導関数とは，図的にはもとの関数の**接線の傾き**を”一般的に”表します。
この意味で，導関数は，「もとの関数の接線の傾き作成マシン」と言えます。
たとえば，χ の値が与えられれば，その点での接線の傾きを瞬時に求めることができます。
導関数の本質のもう１つは，導関数＝接線の傾きからわかる通り，もとの関数の値の増減を表すということです。
たとえば，χ の値が与えられれば，導関数の値が正であれば，その点で関数の値は増加しているし，負であれば減少していることになります。
０であれば増加も減少もしないことになり，上の問題では，この性質を使って，増減表を作り，もとの関数のグラフをかいているわけです。

導関数の応用力

これは“本質を使って解く”，という思考方法です。いわゆる“応用力”の正体です。
応用力を身につけるとは，このような”本質を使って解く”力を身につけることです。
その前提は，“本質”を知っていることです。
だから，応用力とは“知識”であることがわかります。
知識ですから，数学が苦手かどうかには関係なく，誰でも正しく学べばだれにでも身につけることができることがおわかりいただけるとおもいます。

正解は？／この生徒の課題は？

上のように攪乱条件に惑わされている生徒の課題です。
３次関数の極値やグラフを求める５つの手順を”デジタルに”覚えましょう。

1　導関数を求める。

2　＋－の境目を調べる

そのつど２次方程式のＤを調べるわけではありません。
$f'(\chi)$＝０（２次方程式）を因数分解します。

因数分解できるときは，（ⅰ）か（ⅱ）のタイプであり，（Ｄ≧０となる）
因数分解できないときは（ⅲ）のタイプである　（Ｄ＜０となる）

と判別します。

3　増減表をかく。

因数分解によって，タイプがわかります。
（ⅰ）タイプの増減表は，ほとんどの人が難なくかけます。
（ⅱ）タイプのαの前後の増減がどうなるかを心配する人が出ます。
そんなときは，$f'(\chi)$のχにαより小さい数値を入れて計算します。正負がわかります。
χにαより大きい数値をいれて計算します。正負がわかります。
これで，増減表に＋－を書けます。つまり，もとの関数の増減がわかります。
これは，導関数がもとの関数の増減を表すからです。
（ⅲ）タイプでは，$f'(\chi)$のχの任意の値に対して正になるから，定義域のすべてで単調増加することがわかります。増減表は＋だけです。
＊極大値，極小値については，ここで計算しておきます。
この値がないと，次のステップのグラフがかけないからです。

4　グラフをかく。

$f(\chi)$のグラフをかくこと。
だから，増減表の３行目のｙ＝$f(\chi)$の値を使ってグラフをかきます。

5　極値を書く。

極値がある場合は，先に求めた極値を書きます。
正負が変わる点が極値で，（ⅱ），（ⅲ）タイプのような正・正の場合には極値はないことに注意しましょう。

教材を紹介しておきますので，実際に問題を解きながら，このプロセスを覚えて下さい。
とにかく，書くことです。

”わかっている”だけでは，答案は書けません。
”解けるようになる”には，書けるようになることです。

高校数学Ⅱ・導関数の応用　№３ 体験学習	1 関数の値の増加・減少（その２） ■　極大・極小　■

★スマホの機種によっては，体験学習へのリンクができないものがあります。その場合には，PCでご覧下さい★

■演習問題は，数専ゼミ・山形・東原教室で個人指導を受けることができます■

■「高校数学Ⅱ・導関数の応用」★　学習計画書　★

（ブラウザのバック矢印でこの文書に戻ることができます。）

”本質”を使って解くことを教える

数専ゼミ・山形東原教室

〒990－0034　山形市東原町二丁目10番8号

TEL:(023)633－1086　／　FAX.(023)633－1094

メールアドレス：　suusen@seagreen.ocn.ne.jp