数学Essay_364　　数専ゼミ・山形東原教室

体験学習をどうぞ 109

2023.5.26(金)

【高校数学Ｂ】

漸化式と数学的帰納法　　階差タイプ（その４）

今回は，階差タイプの漸化式のお勉強です。
まず，「階差タイプの漸化式」の漸化式全体の中の位置を確認して下さい。

詳しくは，こちら　→ Link｜《漸化式ナビ_Ver3》｜

˝具体的一般˝で思考プロセスを覚えましょう！

第３回で，階差タイプの漸化式の具体例で，第５項を求める思考プロセスを紹介しました。
これは，第５項を求める具体的一般の思考プロセスです。
だから，５をｎに置きかえると，そのまま一般項を求める思考プロセスになるはずです。
やってみます。

第n項の値(一般項)を求める

次のような問題として与えられます。

> $a_1=3$，$a_{n+1}=a_n+2n-1$
> で定義される数列の一般項a_nを求めなさい。

まず，与えられた条件を満たす数列は，どんなものかを調べます。《具体的状況》です。

n	1	2	3	4	5		n	
$\{a_n\}$	$\boxed{3}$，	４，	７，	１２，	１９，	… ，	$\boxed{}$	◀ここを求める問題です。
$\{b_n\}$		１，	３，	５，	７，	… ，	$2n-1$	

３，４，７，１２，１９，…の数列は，等差でも等比でもないから，項の差の数列を調べます。
数列 $\{b_n\}$ です。これが等差数列になっていますから，これならなんとかなりそうです。
そこで，これを利用して，数列 $\{a_n\}$ の第ｎ項(一般項)の値(式)を求めてみます。

数列 $\{a_n\}$ の初項は３です。

数列 $\{a_n\}$ の$\boxed{\text{初項}}$に，初項から第ｎ項までの項間の差の和を加えます。

$\boxed{3}+(1+3+5+7+\cdots+2n-1)$　　▲これが 数列$\{b_n\}$の初項からn－1項までの和です。

となります。

数列 $\{b_n\}$ の和の部分を，Σを使って表現すると，

$$\boxed{3}+\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)$$

となります。
これを計算すれば，数列 $\{a_n\}$ の第ｎ項（一般項）の値が求まります。

この計算は，次のようになります。

ｎ≧２のとき，

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$$ ◀数列の一般項を求める”一般”式です。

$$=3+\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)$$ ◀これ以降は，単なるΣの計算です。

$$=3+2\sum_{k=1}^{n-1}k-\sum_{k=1}^{n-1}1$$

$$=3+2\times\frac{1}{2}\cdot(n-1)\cdot\{(n-1)+1\}-(n-1)$$

$$=3+n(n-1)-(n-1)$$

$$=n^2-2n+4$$

ｎ＝１のとき，

$$a_1=1^2-2\times1+4=3$$

となり，ｎ＝１のときも成り立つ。
よって，$a_n=n^2-2n+4$

いかがですか。
第３回で第５項を求める計算式の５の部分を，ワープロ上でｎに上書きしただけです。
第５項を求める計算が”一般”であったことが”証明”されました。

確かめてみる

生徒Ａ子：「でも，さぁ…
”n^2-2n+4”って，ほんとに，与えられた条件を満たす数列の一般項なの？」
疑い深い人ですねぇ。
では，確かめてみますよ。

n^2-2n+4 において，

ｎ＝１のとき，　$1^2-2\times1+4=3$
ｎ＝２のとき，　$2^2-2\times2+4=4$
ｎ＝３のとき，　$3^2-2\times3+4=7$
ｎ＝４のとき，　$4^2-2\times4+4=12$
ｎ＝５のとき，　$5^2-2\times5+4=19$
つまり

$\{a_n\}$ ：$\boxed{3}$，４，７，１２，１９，…，n^2-2n+4，…
のように，最初の数列になっています。

生徒Ａ子：「わっ，わっ，わっ，…
すっごい！すっごい！すっごい！
ふ～っ…」
そんなに驚くことではない，と思うのですが…

なぜ，n≧2なの？

生徒Ａ子：「ところで，ねぇ…
ずっと，不思議に思っていたんだけど…
なんで，ｎ≧２という条件をつけたり，ｎ＝１を別枠で説明するの？」
はい，はい。
とても，とてもいい質問です。
多くの人は，”そんなもんだ”と思って計算していますが，
ここを疑問に思うことは，求め方の理由を深く知ろうというこれまでの流れをよ～く理解しておられています。

上にあげた具体的な数列を見れば，だれにも，考えずにわかることですが，
階差数列はもとの数列の第２項目から数えています。初項はすでて与えられており，階差数列の和としては数えません。すなわち，ｎ≧２から階差数列を扱います。

これを，式の上から見てみます。
ｎ≧２という条件をつけない場合を考えます。
階差数列の和の部分ですが，ｎ＝１のときは，$\sum_{k=1}^{1-1}(2k-1)$といくことになります。
ｎ＝１から始めると，ｋが１のときから０までの和，というありえないことが生じます。
だから，ｎは２から始めなければなりません。
だから，ｎ＝１のときも，一般項がいえるのかどうかを，最後に確認しておく必要があるのですね。

生徒Ａ子：「アイ，シー！
センセの説明って，よ～くわかるよ。
将来，絶対に，偉くなる
といいですね，センセ！」
…
どこかで聞いたようなフレーズですねぇ。
発想が，ワンパターンとか…

生徒Ａ子：「でも，さぁ…
なんか，長～いお話だったけど…

実際の問題では，どのように答案を書くの？」
はい，いい質問です。
これについては，プリントNo.４（２／７）にていねいに説明してありますので，
そちらを，ぜひご覧下さい。
階差タイプの解法の思考プロセスの”構造”（しくみ）を覚えることも大切な学習です。
”構造”とは，扱う操作内容とその順序のことです。

エピローグ

階差タイプの漸化式の一般項の求め方は，理解できましたか。
”やり方”だけを丸暗記しても，応用することはできません。
解法プロセスの１つ１つの式の”意味”(何を求めているのか)を理解していることが大切です。
こんなことは，どの参考書にも書いてありませんが…

これで，階差タイプの漸化式のお勉強はおしまいです。
次回からは，漸化式の”森”に入ります。
ようするに，なんだかわけのわからない，得体のしれない”化け物”がいっぱい出てくるということです。
《漸化式ナビ_Ver3》を見ると“怪物”の正体の全体像がわかります。

最初は，No.５「ｎ乗を含む漸化式」というのをやります。

漸化式と数学的帰納法　No.４
体験学習

１　漸化式（その３）
■　階差タイプ　■

★スマホの機種によっては，体験学習へのリンクができないものがあります。その場合には，PCでご覧下さい★

■高校数学Ｂ・「漸化式と数学的帰納法」★　学習計画書　★
（ブラウザのバック矢印でこの文書に戻ることができます。）

数専ゼミ·山形東原教室
〒990－0034　山形市東原町二丁目10番8号
TEL:(023)633－1086　／　FAX.(023)633－1094
メールアドレス：　suusen@seagreen.ocn.ne.jp