数学Essay_357　　数専ゼミ・山形東原教室

加法定理を〞逆に〞使う

微分法　|　三角関数の導関数

▶ 2023.5.21(日)

〞見かけ〞は同じ問題だが，実は…

”加法定理の利用”といっても，数学Ⅲでのお話です。

(1)　ｙ＝$\sin^4$(２χ＋１)を微分せよ。

という問題がありまして，その次に

(2)　ｙ＝$\sin^2$(３χ－π)を微分せよ。

という問題が続いている問題集がありました。

え！？

なんで”同じ解き方”をする問題が並んでいるのだろう？

(2) の問題なんてやらんでもいいのだろう，と思いつつも解いていると…

”案に違わず”

ただ，ただ，合成関数の微分法のプロセスの典型であって，”ああ，無駄した！”と思いつつ，置きかえを戻して，最後の詰めに入りました…

$=2\sin(3\chi-\pi)\cdot 3\cos(3\chi-\pi)$

あれ？

ここで終わりじゃないな，なんか”プラスαの操作”が求められているぞ！

ということで…

この式をじっと見つめていれば，だれだって，次の式を思い出します。

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

２倍角の公式は，通常は２αをαで書きかえるときに使います。

上の公式の左から右へ変形する作業をするわけです。

公式を〞逆に〞使ってみる

しかし，もちろん，右の式から左の式を導いてもいいわけです。

そこで，この”手”を使ってみます。

$=3\cdot 2\sin(3\chi-\pi)\cos(3\chi-\pi)$

$=3\sin 2(3\chi-\pi)$

三角関数のπには注意を！

これで答えかな。どうもπが気になる。
三角関数の問題でのπである。きっと何かある，と思うのが正しい思考である。
では，ということで，２を（　）の中にかけ入れてみる。

$=3\sin(6\chi-2\pi)$

先が見えました。
$\sin(6\chi-2\pi)=\sin6\chi$　（１回転してもsinの値は同じ）ですから，

$=3\sin6\chi$

これで完成です。

”角”に分配法則は使えるのだろうか？

ただ，このプロセスで，気になることが１つあります。
$3\sin2(3\chi-\pi)$ で，２を（　）の中にかけ入れていいのか，ということです。
三角関数では，そんな公式はありません。しかし…
２（３χ－π）と６χ－２πは，角の大きさは等しいのだから，分配法則は使えるのだろう。
これで納得できます。

使える！－証明してみよう

が，加法定理からこれを確認してみます。

$\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha$　◀加法定理
$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$　◀2倍角の公式

$=3\cdot2\sin(3\chi-\pi)\cos(3\chi-\pi)$
$=3\cdot\{\sin(3\chi-\pi)\cos(3\chi-\pi)+\sin(3\chi-\pi)\cos(3\chi-\pi)\}$
$=3\cdot\{\sin(3\chi-\pi)\cos(3\chi-\pi)+\cos(3\chi-\pi)\sin(3\chi-\pi)\}$
$=3\cdot\{\sin(3\chi-\pi+3\chi-\pi)\}$　◀加法定理の右辺を左辺へ変形
$=3\sin(6\chi-2\pi)$
$=3\sin6\chi$　◀$\sin(6\chi-2\pi)=\sin6\chi$（1回転してもsinの値は同じ）

証明できました。

公式を“逆に”使ってみる

加法定理は，通常，左辺を右辺へ変形するプロセスを多用します。
しかし，右辺を左辺の形へ変形することで，このような”はなれわざ”もできるのですね。
公式というものは，両方向から自在に使えることで，”思考のツール”になるのですね。