体験学習をどうぞ 106

2023.5.18(木)

【高校数学Ｂ】

漸化式と数学的帰納法　　階差タイプ（その１）

今回は，階差タイプの漸化式のお勉強です。
まず，「階差タイプの漸化式」の漸化式全体の中の位置を確認して下さい。

詳しくは，こちら　→ Link |《漸化式ナビ_Ver3》|

「階差タイプの漸化式」の式の形

最初に，「階差タイプの漸化式」の式の形の特徴をしっかりと覚えて下さい。
特性方程式タイプとの比較から入ります。
階差タイプ単独の形を丸暗記するのではなく，特性方程式タイプとどこが違うのか，という視点で階差タイプの式の形の特徴を覚えます。

特性方程式タイプ　$a_{n+1}=pa_n+q$　（ただし，ｐ，ｑは０でない定数でｐ≠１）
階差タイプ　$a_{n+1}=\ a_n+f(n)$

階差タイプでは，a_nには係数がありません。階差を作るから係数など当然ないわけです。
特性方程式タイプの定数ｑがｎの関数に代わっています。
なぜｎの関数になるのかは，追って説明しますが，ここでは，そうなっているという現象だけを覚えて下さい。
$a_{n+1}-a_n=f(n)$ の形に変形すると，なるほど，$f(n)$ は階差数列の第ｎ項を表しておると納得できます。

生徒Ａ子：「う～っ！？？？」
わかりませんか？
生徒Ａ子：「ところでねぇ…
　　　　　階差数列ってなんだっけ？}
あ，そうですね。
この段階で，階差数列そのものがよくわかっていない人もおられるのですね。
そんなのお見通しです。
プリントの１ページ目は，”階差数列とは何か”の復習です。

階差数列の使い方

”階差数列の一般項の求め方”なんてのはないわけです。
階差数列といえども，それだけを取り出せば，単なる数列ですから。

階差数列はあくまで本体の数列の一般項を求める際の“黒子”です。
本体の数列の一般項を求めるのを影で”お手伝い”しているだけなのですね。

具体例で説明しましょう。
一般的具体です。
このメカニズムをもとに，”一般”を通すことなく，他の具体的な問題へ転用がききます。

３・漸化式と数学的帰納法　ナビ

学習資料	《階差数列》を利用した数列の一般項の求め方

$$19=\boxed{3}+\underbrace{(1+3+5+7)}_{\sum_{k=1}^{5-1} b_k}$$

n	: 1	2	3	4	5	
$\{a_n\}$	: $\boxed{3}$,	4,	7,	12,	19,	…
$\{b_n\}$	: 1,	3,	5,	7,	…,	$2n-1$

$$a_5=a_1+\sum_{k=1}^{5-1} b_k$$
$$=3+\sum_{k=1}^{5-1}(2k-1)$$
$$=3+2\sum_{k=1}^{4}k-\sum_{k=1}^{4}1$$
$$=3+2\times\frac{1}{2}\cdot 4\cdot(4+1)-4$$
$$=3+20-4$$
$$=19$$

数列｛a_n｝の数の並びを見ます。３，４，７，１２，１９，…
等差でもない，等比でもない。
だから，一般項は求められません。
こんなとき，各項間の差をとって，その数の並びを考えます。
１，３，５，７，…
公差数列になりました。この数列なら一般項は求められます。
初項１，公差２の等差数列ですから，一般項は$a_5=1+(n-1)\times 2$より，$2n-1$です。
問題はここからです。
階差数列の一般項が$2n-1$だとわかったのはいいが，これが本体の数列｛a_n｝の一般項を求める際にどのように”お手伝いしている”のか，という問題です。

$$19=\boxed{3}+\underbrace{(1+3+5+7)}_{\sum_{k=1}^{5-1} b_k}$$

n	: 1	2	3	4	5	
$\{a_n\}$	: $\boxed{3}$,	4,	7,	12,	19,	…
$\{b_n\}$	: 1,	3,	5,	7,	…,	$2n-1$

この具体的シェーマがすべてを言い尽くしております。

第5項の値を求める

たとえば，数列｛a_n｝の第５項の値を求めてみます。
　数列｛a_n｝の初項は３です。
　数列｛a_n｝の初項から第（５－１）項までの項間の差の和を加えます。

$$\boxed{3}+(1+3+5+7)=19$$

　　となります。
和の部分を，階差数列の一般項を使って表現すると，

$$\boxed{3}+\sum_{k=1}^{5-1}(2k-1)$$

となります。
これを計算すれば，数列｛a_n｝の第５項の値が求まります。

この計算は，次のようになります。

$$\begin{aligned}
a_5&=a_1+\sum_{k=1}^{5-1}b_k\\
&=3+\sum_{k=1}^{5-1}(2k-1)\\
&=3+2\sum_{k=1}^{4}k-\sum_{k=1}^{4}1\\
&=3+2\times\frac{1}{2}\cdot4\cdot(4+1)-4\\
&=3+20-4\\
&=19
\end{aligned}$$

第n項の値＝一般項を求める

以上の思考プロセスのすべてのシチュエーションにおいて，５をｎに置きかえれば，
数列｛a_n｝の第ｎ項の値，すなわち一般項を求めることができます。
第ｎ項を第５項とか第６項などのような具体的な項の１つと考える【考え方】です。
これが”一般的具体”を使った問題の解き方です。
全体の考え方の流れが，ものすごくわかり易いというのが最大の特徴です。

「階差数列ねぇ…？」
と迷ったら，この第５項を求めるプロセスに戻って解法の流れを確かめればいいのです。

階差タイプの漸化式は…？

以上の”下こしらえ”が終えていれば，

階差タイプの漸化式を理解するのは”屁でも”ありません。
生徒Ａ子：「あのねぇ…
　　　　　ちと，例えが，”ご下品”じゃございません？」
うむ…
ようするに，ブタにもわかる，ということです。
ソクラブタ：「そりゃ，
　　　　　　ぶたに失礼でしょうが…！」
うむ！
ようするに“簡単”ということです。
生徒Ａ子：「最初から，そういえば
　　　　　メモリの無駄遣いせずにすんだのにぃ…」
”メモリの無駄遣い”ですか。
なつかしいことばですねえ！
今の人はなんのことがわからんでしょうが…。
ま，そんなことはどうでもいいのです。

それで，次回に，”ぶたにもわかる”階差タイプの漸化式のお勉強をします。
ソクラブタ：「あの～
　　　　　　さっきの”抗議”は受け付けてもらえなかったようですが…」
え！？
なんのこと？
教材だけは，お見せしておきましょう。

⬇ ⬇ ⬇

漸化式と数学的帰納法　No.４ 体験学習	**1** 漸化式（その３） ■　階差タイプ　■

★スマホの機種によっては，体験学習へのリンクができないものがあります。その場合には，PCでご覧下さい★

■演習問題は，数専ゼミ・山形・東原教室で個人指導を受けることができます■

■高校数学Ｂ・「漸化式と数学的帰納法」★　学習計画書　★

（ブラウザのバック矢印でこの文書に戻ることができます。）

漸化式に強くなる数専ゼミの数列指導

数専ゼミ·山形東原教室
〒990－0034　山形市東原町二丁目10番8号
TEL：(023)633－1086　／　FAX.（023)633－1094
メールアドレス：　suusen@seagreen.ocn.ne.jp