数学Essay_1030　　数専ゼミ・山形東原教室

”一般的解法手順”を覚えることの大切さ
－数Ⅱ・「点と直線」中線定理の証明を例として－

2024.12.20(金)

プロローグ

「ある問題は解けるようになったが，それと同じような問題が解けない。」と悩んでおられる人というのはけっこうおります。
つまり，学んだことを応用できない，という悩みです。
なぜ応用できないのか，考えたことはありますか。

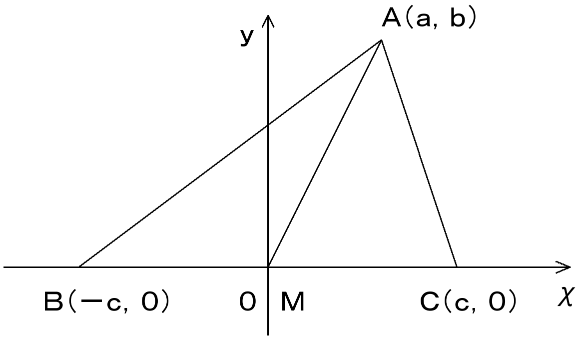
結論を先にいえば，問題を解くときに，解き方とは別に，問題の解き方の一般的な操作手順を覚えていないからです。なんとなく問題の解き方を覚えているだけなのです。
”一般的”というのは，ある個別の問題だけではなく，”一定の範囲のすべての問題を解くときに使える”という意味です。

では，この解き方の一般的な操作手順というのは何のことでしょうか。
具体的にみてみましょう。

「中線定理」の教科書の証明

「中線定理」を証明する問題です。

△ＡＢＣの辺ＢＣの中点をＭとすると，
$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$　…①
が成り立つことを証明しなさい。



【注】「中線定理」は，数学Ａの「図形の性質」の単元で学習済みの教材です。数学Ａでは，三平方の定理を使ってアルファベットをこねくりまわして証明しました。煩雑です。
そこで，数Ⅱでは，三角形を座標上にとって，座標を使って簡単に証明をやってしまおうという学習です。

この問題に対して，ある教科書では次のように証明しております。
（平成２４年発行・啓林館「数学Ⅱ」６７ページ）

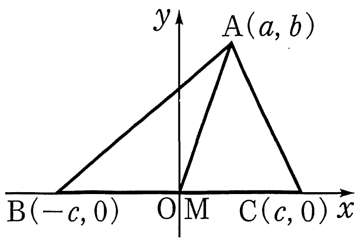
考え方　線分BCの中点がMであるから，点Mを原点にとると，点Bと点Cは原点に関して対称な位置にある。

証　明　点Mを原点，直線BCをx軸にとる。

このとき，B，Cの座標は，それぞれ，

$(-c,\ 0),\ (c,\ 0)$

とおくことができる。



点Aの座標を$(a,\ b)$とすると，

$$AB^2+AC^2=\{(a+c)^2+b^2\}+\{(a-c)^2+b^2\}$$
$$=2(a^2+b^2+c^2)$$

である。また，

$$2(AM^2+BM^2)=2\{(a^2+b^2)+c^2\}$$
$$=2(a^2+b^2+c^2)$$

である。

よって，　$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$

この証明を見て，何を，どんな順序で考えるのかがわかりますか。
この【考え方】を別の問題を解くときに使えますか。
たとえば，次のような問題を，上の証明をまねて解くことができますか。

★演習★【２】

△ＡＢＣの重心をＧとするとき，次の等式を証明しなさい。

$AB^2+AC^2=BG^2+CG^2+4AG^2$　…①

重心の座標さえ求められれば，証明の文章をなぞることで，なんとか証明はできそうです。

では，次の問題はどうでしょう。「中線定理」ではないのですが，「中線定理の証明」とまったく同じ操作手順で証明することができるのです。

★演習★【３】

四角形ＡＢＣＤの辺ＡＢ，ＢＣ，ＣＤ，ＤＡの中点をそれぞれＰ，Ｑ，Ｒ，Ｓとする。

等式 $AC^2+BD^2=2(PR^2+QS^2)$　…①

を証明しなさい。

この問題を「中線定理の証明」と同じ操作手順で証明するには，「中線定理の証明」の一般的な操作手順を覚えておかなければなりません。「中線定理の証明」のしかたをなんとなく問題の解き方だけを覚えているだけでは【３】の問題は解けません。

「中線定理の証明」の一般的操作手順

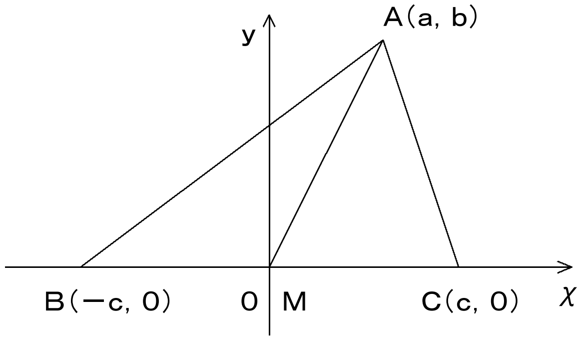
数学の問題解法における”一般的操作手順”の具体例を紹介しましょう。
以下に紹介する答案は，「中線定理」の”一般的操作手順”付証明です。

★解法の技術★

> △ＡＢＣの辺ＢＣの中点をＭとすると，
> $AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$　…①
> が成り立つことを証明しなさい。

【考え方】線分ＢＣの中点がＭであるから，点Ｍを原点にとると，点Ｂと点Ｃは原点に関して対称の位置にある。

［答　　案］



1 （△ＡＢＣの頂点とＭを座標上に取る）

点Ｍを原点，直線ＢＣをχ軸にとる。

このとき，Ｂ，Ｃの座標は，それぞれ，
（−ｃ，０），　（ｃ，０）
とおくことができる。

また，点Ａの座標を（ａ，ｂ）とする。

2 （①の両辺を座標で表す）

◀それぞれの線分の長さの2乗を求める（三平方の定理）

このとき，①の左辺を座標で表すと，

$$\underline{AB^2+AC^2}=\{(a+c)^2+(b-0)^2\}+\{(a-c)^2+(b-0)^2\}$$
$$=2(a^2+b^2+c^2)$$

また，①の右辺を座標で表すと，

$$\underline{2(AM^2+BM^2)}=2\{(a-0)^2+(b-0)^2\}+\{(-c-0)^2+(0-0)^2\}$$
$$=2(a^2+b^2+c^2)$$

3 （結論を書く）

よって，$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$

【注】上で証明した性質を **中線定理** といいます。

1～3の手順が中線定理の証明の一般的操作手順です。
数専ゼミの教材には，このタイプの問題が５題用意されていますが，すべてこの手順で解くことができます。次のリンクから，すべての教材をご覧になれます。

→Link：|高校数学Ⅱ・教材サンプル MENU|→【４】点と直線　No.５

教材をご覧いただくと分かる通り，答案にはこの番号が振ってあり，その手順で答案を書かなければならないように作ってあります。

この指示に従って答案を書く練習をすることで，中線定理を証明する解法の応用力を身につける

ことができます。

エピローグ

このように，数専ゼミでは，すべての単元の問題について，一般的な操作手順が付いている教材を使って学習します。これによって，しっかりとした応用力が身につくようになっております。

数専ゼミのホームページで，いろいろな教材をご覧いただけます。

ホームページには膨大な量のコンテンツが含まれております。
▶サイトマップにジャンル別，目的別にページのガイドがしてありますので，サイトマップから入るのがいちばん分かりやすいと思います。
迷子になったら，ページ左上にある▶サイトマップをクリックして，サイトマップに戻ってください。

応用する技術を教える数専ゼミの数学教室です。

数専ゼミ･山形東原教室
〒990－0034　山形市東原町二丁目10番8号
TEL:（023）633－1086　／　FAX.（023）633－1094
メールアドレス：　suusen@seagreen.ocn.ne.jp