数学Essay_070　　数専ゼミ・山形東原教室

学びの風景(その12)

2022.6.10(金)

２次関数のグラフの問題をやっています。高校数Ｉの授業です。
２次関数のグラフをかくために必要な式を作成する問題です。平方完成の問題です。

★演習★【６】

χ の２次関数を標準形(平方完成の形）に変形せよ。

(1)　$y=\frac{2}{3}p^2-4e^{-1}p$　　(2)　$y=2\chi^2-2(e-e^{-1})\chi$

(1）は，ｐについての２次関数の問題です。
(1)，(2)について，前回は文字定数としてπが入った式を扱いましたが，今回はｅが入ります。しかも，マイナス乗の形です。
この文字を見た瞬間”どきっ”とする生徒も出ます。解く前から「どうすっぺ！」という不安が走ります。
式の”見た目”の形に惑わされることなく，平方完成の一般プロセスを貫徹します。

平方完成のプロセスを詳細に書く

途中の操作をすべて文章化しながら解いていきます。

(1)　$y=\frac{2}{3}p^2-4e^{-1}p$

$=\frac{2}{3}(p^2-6e^{-1}p)$　　◀ｐの項について，ｐ^{2}の係数を割り出す
「ｐ^{2}の係数を１にする」ということです。

ここでｐも割り出す人がいます。平方完成の全体の流れを理解していません。

$=\frac{2}{3}\left\{p^2-6e^{-1}p+\left(\frac{6e^{-1}}{2}\right)^2-\left(\frac{6e^{-1}}{2}\right)^2\right\}$　　◀ｐの係数の半分の2乗をたしてひく。

$=\frac{2}{3}\{(p-3e^{-1})^2-(3e^{-1})^2\}$　　◀前の３項で平方公式の形を作る。

$=\frac{2}{3}(p-3e^{-1})^2-\frac{2}{3}(3e^{-1})^2$　　◀分配法則で{ }をはずす。
ここが一番間違い易い部分です。
しかし，この式を置くとずっと分かりやすくなります。

$=\frac{2}{3}(p-3e^{-1})^2-6e^{-2}$　　◀後の項を計算する。(指数法則の利用)

２行目でｐも括り出す人はもういないですね。
同じ間違いを２度と繰り返さないことは数学力をつけるためには一番大切なことです。
だから，「復習」は数学力をつけるための最も効果的な学習法といえます。
恥も外聞もなく，間違えた問題を２度と間違えることがなくなるまで，繰り返し繰り返し練習して下さい。
ちなみに，この２次関数の軸は $p=3e^{-1}$ で，最小値は $-6e^{-2}$ となります。

実際の答案の書き方

計算プロセスを圧縮します。

(1)　$y=\frac{2}{3}p^2-4e^{-1}p$

$$=\frac{2}{3}\left\{p^2-6e^{-1}p+\left(\frac{6e^{-1}}{2}\right)^2-\left(\frac{6e^{-1}}{2}\right)^2\right\}$$

$$=\frac{2}{3}(p-3e^{-1})^2-\frac{2}{3}(3e^{-1})^2$$

$$=\frac{2}{3}(p-3e^{-1})^2-6e^{-2}$$

さらに，圧縮します。

(1)　$y=\frac{2}{3}p^2-4e^{-1}p$

$$=\frac{2}{3}\left\{p^2-6e^{-1}p+\left(\frac{6e^{-1}}{2}\right)^2-\left(\frac{6e^{-1}}{2}\right)^2\right\}$$

$$=\frac{2}{3}(p-3e^{-1})^2-6e^{-2}$$

この問題では，１行目からただちに３行目を導くのはかなり難しいと思えます。圧縮するのは上の程度でよいでしょう。そう時間もかかりません。暗算して間違えるより”まし”です。

平方完成のプロセスを詳細に書く

ｅを含むもう１題をやってみます。χ の係数が多項式です。次の問題の下準備の問題です。

(2)　$y=2\chi^2-2(e-e^{-1})\chi$

$=2\{\chi^2-(e-e^{-1})\chi\}$　◀χ の項について，χ^2 の係数を割り出す
「χ^2 の係数を１にする」ということです。

$=2\left\{\chi^2-(e-e^{-1})\chi+\left(\frac{e-e^{-1}}{2}\right)^2-\left(\frac{e-e^{-1}}{2}\right)^2\right\}$　◀χ の係数の半分の２乗をたしてひく。

$=2\left\{\left(\chi-\frac{e-e^{-1}}{2}\right)^2-\left(\frac{e-e^{-1}}{2}\right)^2\right\}$　◀前の３項で平方公式の形を作る。

$=2\left(\chi-\frac{e-e^{-1}}{2}\right)^2-2\left(\frac{e-e^{-1}}{2}\right)^2$　◀分配法則で｛ ｝をはずす。

$=2\left(\chi-\frac{e-e^{-1}}{2}\right)^2-\frac{1}{2}(e^2-2ee^{-1}+e^{-2})$　◀後の項を計算する。（指数法則の利用）
指数法則を使う計算なのでプロセスを書きます。

$=2\left(\chi-\frac{e-e^{-1}}{2}\right)^2-\frac{1}{2}e^2+1-\frac{1}{2}e^{-2}$　◀$ee^{-1}=e^1e^{-1}=e^{1-1}=e^0=1$

ちなみに，この２次関数の軸は $\chi=\frac{e-e^{-1}}{2}$ で，最小値は $-\frac{1}{2}e^2+1-\frac{1}{2}e^{-2}$ となります。

χ の係数が多項式なので，定数項の計算が少し手間がかかります。ここでは，指数法則の知識が必要です。数Ⅱ以上の知識が必要です。ｅは数Ⅲで扱う特別な定数ですが，ここでは単なる文字

として扱っても計算できます。

実際の答案の書き方

計算プロセスを圧縮します。

(2)　$y=2\chi^2-2(e-e^{-1})\chi$

$$=2\left\{\chi^2-(e-e^{-1})\chi+\left(\frac{e-e^{-1}}{2}\right)^2-\left(\frac{e-e^{-1}}{2}\right)^2\right\}$$

$$=2\left(\chi-\frac{e-e^{-1}}{2}\right)^2-2\left(\frac{e-e^{-1}}{2}\right)^2$$

$$=2\left(\chi-\frac{e-e^{-1}}{2}\right)^2-\frac{1}{2}e^2+1-\frac{1}{2}e^{-2}$$

さらに，圧縮します。

(2)　$y=2\chi^2-2(e-e^{-1})\chi$

$$=2\left\{\chi^2-(e-e^{-1})\chi+\left(\frac{e-e^{-1}}{2}\right)^2-\left(\frac{e-e^{-1}}{2}\right)^2\right\}$$

$$=2\left(\chi-\frac{e-e^{-1}}{2}\right)^2-\frac{1}{2}e^2+1-\frac{1}{2}e^{-2}$$

平方完成の練習第６問目はここまでです。

一般化のレベルをさらに上げます

次回は最終回です。

多項式についての２次式の平方完成をやります。

たとえば，ｔ＋３についての２次式 $y=\frac{1}{2}(t+3)^2-\frac{5}{4}a(t+3)+\frac{3a^2-4}{2}$ の平方完成など。

この形は，通常ｔ＋３＝ｕなどと１文字に置きかえて，ｕの２次関数として解きます。

しかし，平方完成を解法プロセスの一部分として含む問題では，置きかえることによって，全体の解法の流れが見えにくくなる場合があります。そんなときは，多少計算が複雑であっても，置きかえないで平方完成をするほうが，解法の全体の流れが見やすくなるため，速くて間違いが少なくなります。

プリント学習で応用力を培う数専ゼミの数学教室です。

数専ゼミ・山形東原教室

〒990－0034　山形市東原町二丁目10番8号

TEL:(023)633－1086　／　FAX.（023)633－1094

メールアドレス：　suusen@seagreen.ocn.ne.jp