数学Essay_069　　数専ゼミ・山形東原教室

# 学びの風景(その11)

2022.6.9(木)

２次関数のグラフの問題をやっています。高校数Ⅰの授業です。
２次関数のグラフをかくために必要な式を作成する問題です。平方完成の問題です。

★演習★【５】

χの２次関数を標準形(平方完成の形）に変形せよ。

$$y=\frac{1}{3}a^2-\frac{8}{\pi^2}a+\frac{1}{2}$$

ａについての２次関数の問題に変わります。
いままで，ずっとχの２次関数だけを扱ってきました。
なぜか，χが他の文字に変わるとおたおたする生徒がでます。
平方完成のプロセスが十分に一般化されていないからです。
その意味で，ａに限らず，よく使われるｔとかｐについての２次関数の平方完成も学習しておくことは，応用力をつけるための必須の課題といえます。

## 平方完成のプロセスを詳細に書く

途中の操作をすべて文章化しながら解いていきます。

$$y=\frac{1}{3}a^2-\frac{8}{\pi^2}a+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{3}\left(a^2-\frac{24}{\pi^2}a\right)+\frac{1}{2}$$

◀ａの項について，ａ$^2$の係数を割り出す
「ａ$^2$の係数を１にする」ということです。
ここでａも割り出す人がいます。平方完成の全体の流れを理解していません。

$$=\frac{1}{3}\left\{a^2-\frac{24}{\pi^2}a+\left(\frac{12}{\pi^2}\right)^2-\left(\frac{12}{\pi^2}\right)^2\right\}+\frac{1}{2}$$

◀ａの係数の半分の2乗をたしてひく。

$$=\frac{1}{3}\left\{\left(a-\frac{12}{\pi^2}\right)^2-\left(\frac{12}{\pi^2}\right)^2\right\}+\frac{1}{2}$$

◀前の３項で平方公式の形を作る。

$$=\frac{1}{3}\left(a-\frac{12}{\pi^2}\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{12}{\pi^2}\right)^2+\frac{1}{2}$$

◀分配法則で{ }をはずす。
ここが一番間違い易い部分です。
しかし，この式を置くとずっと分かりやすくなります。

$$=\frac{1}{3}\left(a-\frac{12}{\pi^2}\right)^2+\frac{1}{2}-\frac{48}{\pi^4}$$

◀後の２項を計算する。
ここは中3程度の式の計算なので，途中の計算は省略します。

２行目でａを割り出す人が出ます。
χについての２次関数では，ａは定数ですので，括り出さなければなりません。しかし，ここでは，ａについての２次関数ですから，括り出すと次にやることがなくなってしまいます。
畢竟，ここでａを括りだしておいて，

３行目で，「ここで，” $\chi$ ”の係数の半分の２乗をたしてひくんだけど…
２乗するものがないじゃないの！」と，ばかなことを言いつつ悩んでいる人が出ます。
やはり，プロセスが一般化されていません。

ちなみに，この２次関数の軸は $\chi=\frac{12}{\pi^2}$ で，最小値は $\frac{1}{2}-\frac{48}{\pi^4}$ となります。

ごらんのように，分母に $\pi$ が入っております。
数Ⅲの定積分の教材です。最小値を求める問題です。
このように，平方完成は，数Ⅲまでついてまわります。
だから，ほどほどではなく，完璧に一般的な形で使えるように練習しておく必要があります。

次回に扱う予定の【６】の問題も数Ⅲの教材です。

【６】　$y=\frac{2}{3}p^2-4e^{-1}p$

すなわち，平方完成の技術は高校数学の基礎中の基礎なのです。
「平方完成ができない」＝「数学ができない」という等式は真理です。

## 実際の答案の書き方

計算プロセスを圧縮します。

$$
\begin{aligned}
y&=\frac{1}{3}a^2-\frac{8}{\pi^2}a+\frac{1}{2}\\
&=\frac{1}{3}\left\{a^2-\frac{24}{\pi^2}a+\left(\frac{12}{\pi^2}\right)^2-\left(\frac{12}{\pi^2}\right)^2\right\}+\frac{1}{2}\\
&=\frac{1}{3}\left(a-\frac{12}{\pi^2}\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{12}{\pi^2}\right)^2+\frac{1}{2}\\
&=\frac{1}{3}\left(a-\frac{12}{\pi^2}\right)^2+\frac{1}{2}-\frac{48}{\pi^4}
\end{aligned}
$$

さらに，圧縮します。

$$
\begin{aligned}
y&=\frac{1}{3}a^2-\frac{8}{\pi^2}a+\frac{1}{2}\\
&=\frac{1}{3}\left\{a^2-\frac{24}{\pi^2}a+\left(\frac{12}{\pi^2}\right)^2-\left(\frac{12}{\pi^2}\right)^2\right\}+\frac{1}{2}\\
&=\frac{1}{3}\left(a-\frac{12}{\pi^2}\right)^2+\frac{1}{2}-\frac{48}{\pi^4}
\end{aligned}
$$

◀この部分を省略している参考書もありますが，
計算の正確さを期すためには書くべきです。

１行目からすぐに３行目が思い浮ぶ人もいるのも確かです。
すなわち，

$$
\begin{aligned}
y&=\frac{1}{3}a^2-\frac{8}{\pi^2}a+\frac{1}{2}\\
&=\frac{1}{3}\left(a-\frac{12}{\pi^2}\right)^2+\frac{1}{2}-\frac{48}{\pi^4}
\end{aligned}
$$

平方完成のプロセスが完全に頭の中に入っていれば，あながち”すごい”わけではありません。単なる暗算力の違いにすぎません。

平方完成の練習第５問目はここまでです。

## 一般化のレベルをさらに上げます

この後は，数Ⅲの定積分で扱う平方完成をやってみます。

【６】　$y=\frac{2}{3}p^2-4e^{-1}p$　　　$y=2\chi^2-2(e-e^{-1})\chi$

おまけとして，多項式についての２次式の平方完成をやります。

たとえば，ｔ＋３についての２次式 $y=\frac{1}{2}(t+3)^2-\frac{5}{4}a(t+3)+\frac{3a^2-4}{2}$ の平方完成など。

この形は，通常ｔ＋３＝ｕなどと１文字に置きかえて，ｕの２次関数として解きます。
しかし，めんどうくさいから，このままの形で解きたいという人もおるわけで，そんな人のために，置きかえをしないで，このままの形で解く方法を学んでみます。

## プリント学習で応用力を培う数専ゼミの数学教室です。

**数専ゼミ・山形東原教室**
〒990－0034　山形市東原町二丁目10番8号
TEL:(023)633－1086　／　FAX.(023)633－1094
メールアドレス：　suusen@seagreen.ocn.ne.jp

「プリント」は，解法プロセスの俯瞰性と解法プロセスの構成部分を瞬時に見返して何回も確認することができることにより，学習時間を短縮し，応用力を定着させることに有効な学習ツールといえます。　▲●■

さらに，より広く・深く理解するために，自分にとって必要な知識を書き込んでおくことができること，あるいは関連資料や類題を添付しておくことができるという点で，「プリント」は学習ツールとしてははるかに有用であるといえます。　■●▲