

## 学びの風景(その10)

2022. 6. 7 (火)

2次関数のグラフの問題をやっています。高校数 I の授業です。

2次関数のグラフをかくために必要な式を作成する問題です。平方完成の問題です。

### ★演習★【4】

$x$  の 2 次関数を標準形(平方完成の形)に変形せよ。

$$y = -\frac{3}{2}x^2 + (a+3)x + 5a$$

文字係数を含む式の平方完成です。また,  $x$  の係数が多項式の形です。

式は, いくらでも難しくできますが, この辺が平方完成の 1 つの到達点であると考えて下さい。

## 平方完成のプロセスを詳細に書く

途中の操作をすべて文章化しながら解いていきます。

$$y = -\frac{3}{2}x^2 + (a+3)x + 5a$$

$$= -\frac{3}{2} \left\{ x^2 - \frac{2(a+3)}{3}x \right\} + 5a$$

◀  $x$  の項について,  $x^2$  の係数を割り出す  
「 $x^2$  の係数を 1 にする」ということです。

$$= -\frac{3}{2} \left\{ x^2 - \frac{2(a+3)}{3}x + \left(\frac{a+3}{3}\right)^2 - \left(\frac{a+3}{3}\right)^2 \right\} + 5a$$

◀  $x$  の係数の半分の 2 乗をたしてひく。

$$= -\frac{3}{2} \left\{ \left(x - \frac{a+3}{3}\right)^2 - \left(\frac{a+3}{3}\right)^2 \right\} + 5a$$

◀ 前の 3 項で平方公式の形を作る。

$$= -\frac{3}{2} \left(x - \frac{a+3}{3}\right)^2 + \frac{3}{2} \left(\frac{a+3}{3}\right)^2 + 5a$$

◀ 分配法則で { } をはずす。

ここが一番間違い易い部分です。

しかし, この式を置くとずっと分かりやすくなります。

$$= -\frac{3}{2} \left(x - \frac{a+3}{3}\right)^2 + \frac{a^2+36a+9}{6}$$

◀ 後の 2 項を計算する。

ここは中 3 程度の式の計算なので, 途中の計算は省略します。

ちなみに, この 2 次関数の軸は  $x = \frac{a+3}{3}$  で, 最大値は  $\frac{a^2+36a+9}{6}$  となります。

よって, 頂点の座標は  $\left(\frac{a+3}{3}, \frac{a^2+36a+9}{6}\right)$  です。

このように, 2 次関数の最大値, 最小値や形を判断するには, 平方完成ができないと不可能であることがわかりただけだと思います。

すなわち, 平方完成の技術は高校数学の基礎中の基礎なのです。

「平方完成ができない」=「数学ができない」という等式は真理です。

## 実際の答案の書き方

計算プロセスを圧縮します。

$$\begin{aligned} y &= -\frac{3}{2}\chi^2 + (a+3)\chi + 5a \\ &= -\frac{3}{2}\left\{\chi^2 - \frac{2(a+3)}{3}\chi + \left(\frac{a+3}{3}\right)^2 - \left(\frac{a+3}{3}\right)^2\right\} + 5a \\ &= -\frac{3}{2}\left(\chi - \frac{a+3}{3}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(\frac{a+3}{3}\right)^2 + 5a \\ &= -\frac{3}{2}\left(\chi - \frac{a+3}{3}\right)^2 + \frac{a^2+36a+9}{6} \end{aligned}$$

さらに、圧縮します。

$$\begin{aligned} y &= -\frac{3}{2}\chi^2 + (a+3)\chi + 5a \\ &= -\frac{3}{2}\left\{\chi^2 - \frac{2(a+3)}{3}\chi + \left(\frac{a+3}{3}\right)^2 - \left(\frac{a+3}{3}\right)^2\right\} + 5a \\ &= -\frac{3}{2}\left(\chi - \frac{a+3}{3}\right)^2 + \frac{a^2+36a+9}{6} \end{aligned}$$

◀この部分を省略している参考書もありますが、計算の正確さを期すためには書くべきです。

1行目からすぐに3行目が思い浮かぶ人もいるのも確かです。

平方完成の練習第4問目はここまでです。

## さらに応用してみます

この後は、次のような $\chi$ でない2次式について、平方完成をやってみます。

$$\text{【5】 } y = \frac{1}{3}a^2 - \frac{8}{\pi^2}a + \frac{1}{2}$$

$$\text{【6】 } y = \frac{2}{3}p^2 - 4e^{-1}p$$

おまけとして、多項式についての2次式の平方完成をやります。

たとえば、 $t+3$ についての2次式 $y = \frac{1}{2}(t+3)^2 - \frac{5}{4}a(t+3) + \frac{3a^2-4}{2}$ の平方完成など。

**プリント学習で応用力を培う数専ゼミの数学教室です。**

### 数専ゼミ・山形東原教室

〒990-0034 山形市東原町二丁目10番8号

TEL: **(023)633-1086** / FAX: (023)633-1094

メールアドレス: suusen@seagreen.ocn.ne.jp