

学びの風景(その4)

2022.5.22(日)

複2次式の因数分解です

次の式を因数分解しなさい。

(1) $4x^4 - 21x^2 + 9$

(2) $x^4 - 14x^2 + 1$

(3) $x^4 + 4$

(1) の問題をていねいに、ていねいに因数分解してみました。(前回のお話のまとめです。)

$$\begin{aligned}
 & 4x^4 - 21x^2 + 9 \\
 = & (2x^2)^2 - 12x^2 - 9x^2 + 3^2 \\
 & \text{ぶん殴って2つに割った} \\
 = & (2x^2)^2 - 12x^2 + 3^2 - 9x^2 \\
 & \text{ここは因数分解できません} \quad \text{なでなでして式の末尾に移動をお願いした} \\
 = & (2x^2 - 3)^2 - 9x^2 \\
 = & (2x^2 - 3)^2 - (3x)^2 \\
 = & (2x^2 - 3 + 3x)(2x^2 - 3 - 3x) \\
 = & (2x^2 + 3x - 3)(2x^2 - 3x - 3)
 \end{aligned}$$

となります。

$x^4 - 14x^2 + 1$ の因数分解

ということで、複2次式の因数分解など”ぶん殴ってなでなで”しちゃえば、どうってこたあねいなど(2)の問題にとりかかっている生徒A子であります。

(1)と同じ”手”を使います。

$$\begin{aligned}
 & x^4 - 14x^2 + 1 \\
 = & (x^2)^2 - 2x^2 - 12x^2 + 1^2 \\
 & \text{ぶん殴って2つに割った} \\
 = & (x^2)^2 - 2x^2 + 1^2 - 12x^2 \\
 & \text{ここは因数分解できません} \quad \text{なでなでして式の末尾に移動をお願いした}
 \end{aligned}$$

◀ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
の $-2ab$ を作りました。

生徒A子：「これを()² - ()²の形にして()()へもっていき、因数分解完成だな。

だな！

…ん！？なんだ、こりゃ？

センセっ！この問題、なでなでしても言うことを聞いてくれないよ！

()²の形になってくれないがね！」

ここで、”ぶん殴ってなでなで”方式は行き詰まります。これは、複2次式の因数分解の一般的解法ではない、ということです。

複2次式の因数分解の一般的解法

では、複2次式の因数分解の一般的方法とは何か、ということにお話は進みます。結論からいいます。

ようするに、平方の形の差ができればいいわけですから、第2項を”分ける”と考えるのではなく、第2項は無視し、第1項と第3項が平方の形になっているときは、それらを使って第2項に、平方の形ができるような式をでっちあげる、ということです。

当然、第2項に新しい項を付け加えることになるわけですから、式の値は変わります。これではいけないので、式の値が変わらないように、加えた式を最初からあった第2項から引き、これを式の末尾に付けておきます。

これで、 $(\quad)^2 - (\quad)^2$ の形が作れます。

これ以降は、和と差の積の因数分解で、中学レベルです。

(2)の問題では、次のようになります。

$$\begin{aligned}
 & x^4 - 14x^2 + 1 \\
 & \quad \text{第2項は無視し、式の末尾にのけておく} \\
 = & (x^2)^2 + 2x^2 + 1^2 - 14x^2 - 2x^2 \\
 & \quad \text{平方の形ができるようにする} \quad \text{加えたものを引いておく} \\
 = & (x^2)^2 + 2x^2 + 1^2 - 16x^2 \\
 & \quad \text{ここは因数分解できません} \quad \text{平方数になった} \\
 = & (x^2 + 1)^2 - (4x)^2 \\
 = & (x^2 + 1 + 4x)(x^2 + 1 - 4x) \\
 = & (x^2 + 4x + 1)(x^2 - 4x + 1)
 \end{aligned}$$

◀ $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ の $+2ab$ を作りました。

◀ 第2項が $-2x^2$ でも、 $+2x^2$ でも平方の形は作れる。後の項が平方の形になる方を選ぶ。

これが、複2次式の因数分解の一般的方法です。

一般的方法とは、どんな問題でも解ける解法であるという意味です。

だから、もっとも応用範囲の広い解き方です。

応用力とはこのような一般的知識のことです。数学的な能力とは関係ありません。

誰でも学習によって手に入れることのできる能力です。

$x^4 + 4$ の因数分解

一般的解法を使うと、(3)のように、”ぶん殴る”相手がいない問題でも解けます。

第2項など、最初から無視しているわけですから、なくてもかまいません。与えられた2つの項から平方の形を作るのに必要な第2項を作ります。次のようになります。

(3) $x^4 + 4$

$$= (x^2)^2 + 4x^2 + 2^2 - 4x^2$$

平方の形ができるようにする 加えたものを引いておく

$$= (x^2 + 2)^2 - (2x)^2$$

$$= (x^2 + 2 + 2x)(x^2 + 2 - 2x)$$

$$= (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$$

$$\triangleleft (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

の $+2ab$ を作りました。

まとめです…

生徒A子：「センセ！今回は、あたしの出番は少なかったですねえ…」

先生：「すみません、つい力が入ってしまった、ひとりで走ってしまいました。」

生徒A子：「でも、すごいよねえ。あれだけ難しいと思っていた複2次式の因数分解が、ものすごく簡単に見えるもの。一般的解法ってすごい！“ぶん殴ってなでなで”は忘れよつと！」

先生：「そうですね。ある特殊な分野では抜群の力を発揮してすごいなと思える解法ほど、それが一般的解法であるかどうかをチェックする必要があるのです。

「はじき」や「くもわ」もその一種ですがね…」

生徒A子：「そうだよな、それなら知っている。」はじき”など速さの単位換算ではまったく役に立たないんだから…。時速90kmは秒速何mですか、という問題ではじきはどのように使うというのよ。あほらし…。」

生徒B夫：「”はじき”って何？」

先生：「あ、賢い人は、こんなばかなものは知らなくていいの！」

ということで、複2次式の因数分解の授業はおしまいです。

数専ゼミで使っている「複2次式の因数分解」の学習教材を紹介しておきます。勉強してみてください。感動します。特に、数学の苦手は人は…(*^_^*)\

「複2次式の因数分解」の学習教材 → |Link|

だれでも応用力が学べる数専ゼミの数学教室です。

数専ゼミ・山形東原教室

〒990-0034 山形市東原町二丁目10番8号

TEL: **(023)633-1086** / FAX. (023)633-1094

メールアドレス: suusen@seagreen.ocn.ne.jp