数専ゼミ・東原教室

「おきかえ」について

2021.5.19(水)

おきかえて易しく計算してみる

式が複雑になると，「おきかえ」という技術を使い，式を簡単にして計算をします。
たとえば，

> $(\chi^2+\chi+1)(\chi^2+\chi-2)$ を展開しなさい。

次のように計算します。

$(\chi^2+\chi+1)(\chi^2+\chi-2)$

$=\{(\chi^2+\chi)+1\}\{(\chi^2+\chi)-2\}$ ◀共通部分を(　)でかこむ。

ここで，$(\chi^2+\chi)=\mathrm{A}$ とおくと，

与式 $=(\mathrm{A}+1)(\mathrm{A}-2)$ ◀(共通部分)をAとおきかえる。

$=\mathrm{A}^2-\mathrm{A}-2$　…①　◀おきかえた式を展開する。

①で，Aを戻して，

与式 $=(\chi^2+\chi)^2-(\chi^2+\chi)-2$ ◀Aを戻して，展開して，同類項をまとめる。

$=\chi^4+2\chi^3+\chi^2-\chi^2-\chi-2$

$=\underline{\chi^4+2\chi^3-\chi-2}$

おきかえると易しく計算できるのか？

「なるほど，簡単に計算できる。」と思えるのは，すでにこの計算のしかたを知っている人です。初めてこの計算技術を使う人の中には，全体のシチュエイションが理解できない人もおります。この問題は見てすぐ共通な式が見つかるからいいのですが，項を入れ換えたり，共通因数をくくり出すことによって共通の式を作りだす問題になると，困難さはいっきに増します。
たとえば，

$(2\chi^2-3\chi+4)(3+3\chi-2\chi^2)$

$(\chi^2-3\chi+6)(2\chi^2-6\chi-5)$

など。

おきかえると，ごちゃごちゃすることもある！

置きかえをすることによって，解法プロセスが複雑になって，全体の流れがみえにくくなる，ということも起こります。たとえば，三角関数の最大・最小の問題です。

　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，関数 $y = 2\cos 2\theta + 4\cos\theta + 1$ の最大値と最小値を求めなさい。また，そのときの θ の値も求めなさい。

置きかえを使って解いて見ます。

1 角の大きさをそろえる

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ だから，

$y = 2\cos 2\theta + 4\cos\theta + 1$

$y = 2(2\cos^2\theta - 1) + 4\cos\theta + 1$ 　◀2倍角の公式の利用

$y = 4\cos^2\theta + 4\cos\theta - 1$

2 $\cos\theta = t$ とおき，tの範囲を求める

$\cos\theta = t$ 　…①とおく。 　◀ 置きかえたら，範囲を確認

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で t のとりうる値を求めると，

$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ であるから，

$-1 \leqq t \leqq 1$

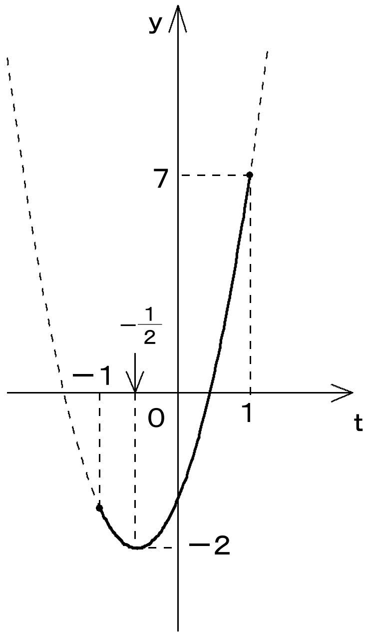
3 関数yをtで表し，その最大値，最小値を求める

与えられた関数 y を t で表すと，

$y = 4t^2 + 4t - 1$

$= 4\left(t + \dfrac{1}{2}\right)^2 - 2$

このグラフは右のようになる。



グラフより，

$t = 1$ のとき，最大値 7

$t = -\dfrac{1}{2}$ のとき，最小値 -2

をとる。

4 θ の値を求める

y が最大値，最小値をとるときの θ の値を求めると，

（ⅰ）$t = 1$ のとき，

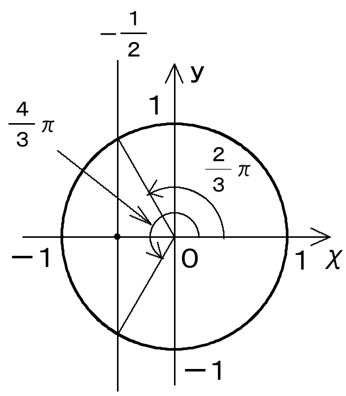
①より，$\cos\theta = 1$ であるから，

$\theta = 0$

（ⅱ）$t = -\dfrac{1}{2}$ のとき，

①より，$\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$ であるから，

$\theta = \dfrac{2}{3}\pi$，$\dfrac{4}{3}\pi$



5 答えを書く

よって，

$\theta = 0$ のとき，最大値 7，$\theta = \dfrac{2}{3}\pi$，$\dfrac{4}{3}\pi$ のとき，最小値 -2

何をしているのかよくわかりません。おきかえたため解法が理解しにくく，かつ解法プロセスを覚えるのにかなりやっかいとなります。易しくしたつもりが難しくなっています。

おきかえないで解いてみると…

次に，置きかえを使わないで解いてみます。

1 （関数の式を標準形に変形する）

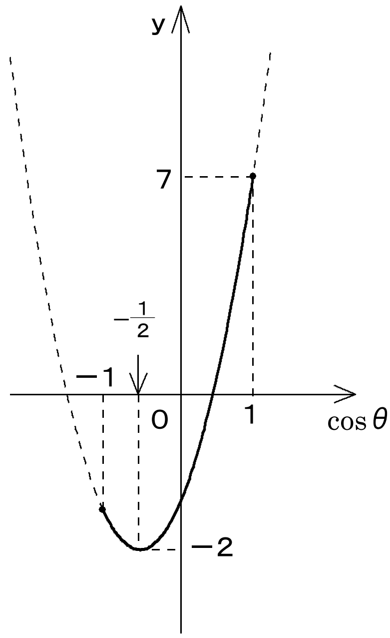
２倍角の公式より，$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ であるから，

$y = 2(2\cos^2\theta - 1) + 4\cos\theta + 1$　◀２倍角の公式の利用

$y = 4\cos^2\theta + 4\cos\theta - 1$　…①

$y = 4\left(\cos^2\theta + \cos\theta + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) - 1$

$y = 4\left(\cos\theta + \frac{1}{2}\right)^2 - 2$　…②



2 （グラフをかく）

$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ であるから，

②のグラフは右のようになる。

《補助計算》

①で，

$\cos\theta = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot(-1)}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{2}$

（約－１．２と０．２）　◀グラフをかくために

$\cos\theta = 1$ のとき，

$y = 4 \times 1^2 + 4 \times 1 - 1 = 7$

3 （最大値・最小値を求める）

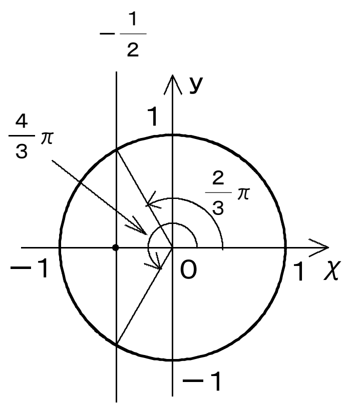
グラフより，

・$\cos\theta = -\frac{1}{2}$，すなわち，$\theta = \frac{2}{3}\pi$，$\frac{4}{3}\pi$ のとき，

最小値－２をとる。

・$\cos\theta = 1$，すなわち，$\theta = 0$ のとき，

最大値７をとる。



全体の流れが非常にすっきりしているのがわかると思います。$\cos\theta$ を χ とみなして計算すれば，単なる２次関数の最大・最小の初級問題になります。

｜メニューへ戻る｜

「技術」で計算速度をあげること！

試験は時間との勝負になります。また，勉強時間も短くしたいものです。だから，練習に練習を重ね，がんばって”速く”計算する力をつけるのではなく，「技術」で計算時間を短縮する力をつけることが大切なのです。
より短い時間の勉強で，より速い計算力を身につける勉強をしましょう。それが，勝利の方程式です。

勝利の方程式が学べる数専ゼミの数学教室です。

数専ゼミ・山形東原教室

〒990－0034　山形市東原町二丁目10番8号

TEL:(023)633－1086　／　FAX.(023)633－1094

メールアドレス：　suusen@seagreen.ocn.ne.jp

数専ゼミで学習する教材については，こちらから実物サンプルをご覧になれます。→ 教材