6

第１章　数列　３・漸化式と数学的帰納法

1 漸化式（その５）

（１／７）■　分数を含む漸化式　■

分数型 I　$a_{n+1}=\dfrac{pa_n}{qa_n+r}$ 型

◇《$a_{n+1}=\dfrac{pa_n}{qa_n+r}$ 型》 学力化 ➡　／　，

★解法の技術★

次の漸化式で決定される数列の第ｎ項 a_n を求めなさい。

$a_1=1$，　$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{4-6a_n}$

【考え方】$a_{n+1}=\dfrac{pa_n}{qa_n+r}$ タイプの漸化式は，両辺の逆数をとることから始める。

これを整理すると特性方程式型漸化式になるので，それを解けば一般項 a_n が求まる。このとき，$\dfrac{1}{a_n}=b_n$ とおいて特性方程式型漸化式を解くと分かりやすい。

（置きかえないと，式は複雑になるが，計算スピードは速く，解法プロセス全体の見通しはよくなる。）

［答　　案］

0 （定義を確認する）

$a_1=1$　…①，　　$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{4-6a_n}$　…②

②で，$a_{n+1}=0$ とすると，$4-6a_n$ は分母であるから０では
ないので $a_n=0$ となり，$a_1=1$ に反する。
よって，$a_n\neq 0$，$a_{n+1}\neq 0$　（だから）

1 （与式を基本タイプの漸化式に変形する）

②で，両辺の逆数をとって，　◀スーパーテクニック

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{4-6a_n}{a_n}$$

◀ a_{n+1} や a_n で割ってよい。

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{4}{a_n}-\frac{6a_n}{a_n}$$

$$\frac{1}{a_{n+1}}=4\cdot\frac{1}{a_n}-6\quad\cdots③$$

◀特性方程式型漸化式になった！

（次のページへつづく）↗

| メニューへ戻る |

↗（前のページからのつづき）

《以降は，特性方程式型漸化式の一般項を求める問題である》　◀→№3（４／９）を参照

2　（特性方程式型漸化式を等比型漸化式に変形する）

③は，$\dfrac{1}{a_n}=b_n$ とおくと，$\dfrac{1}{a_{n+1}}=b_{n+1}$ となるから，

$b_{n+1}=4b_n-6$　…③’　◀ $a_{n+1}=pa_n+q$（特性方程式型）になった！

と表せる。

そこで，③’が，

$b_{n+1}-\alpha=4(b_n-\alpha)$　…④

と変形できたとすると，

③’－④より，

$$\begin{array}{rrl} & b_{n+1} & =4b_n-6 \\ -) & b_{n+1}-\alpha & =4(b_n-\alpha) \\ \hline & \alpha & =-6+4\alpha \\ & \alpha & =2 \end{array}$$

よって，④は，$\alpha=2$ のとき，

$b_{n+1}-2=4(b_n-2)$　…⑤　◀等比型漸化式になった！

となる。

《簡便算》

③’において，b_{n+1} と b_n を χ とおいた方程式（特性方程式）を解くと，

$\chi=4\chi-6$ より，$\chi=\underline{2}$

③’の両辺から $\underline{2}$ を引いて，

$b_{n+1}-\underline{2}=4b_n-6-\underline{2}$

$b_{n+1}-2=4(b_n-2)$　…⑤

◀等比型漸化式になった！

3　（数列 $\{b_n-2\}$ の一般項を求める）

⑤から，数列 $\{b_n-2\}$ は，

初項　$b_1-2==\dfrac{1}{a_1}-2=\dfrac{1}{1}-2=-1$，　公比　４

の等比数列であるから，一般項は，

$b_n-2=-1\cdot 4^{n-1}$　より，

$b_n-2=-4^{n-1}$

4　（一般項 a_n を求める）

b_n を戻して，$\dfrac{1}{a_n}-2=-4^{n-1}$

$\dfrac{1}{a_n}=-4^{n-1}+2$　◀－2を移項

$\underline{a_n=\dfrac{1}{2-4^{n-1}}}$　◀両辺の逆数をとる。

6

第１章　数列　３・漸化式と数学的帰納法

1 漸化式（その５）

（４／７）■　分数を含む漸化式　■

分数型Ⅱ　$a_{n+1}=\dfrac{pa_n+s}{qa_n+r}$ 型

◇《$a_{n+1}=\dfrac{pa_n+s}{qa_n+r}$ 型》 学力化➡　／　，

★解法の技術★

$a_1=1$，　$a_{n+1}=\dfrac{a_n-1}{a_n+3}$ で定義されている数列 $\{a_n\}$ について，

(1)　$b_n=\dfrac{1}{a_n+1}$ とおくとき，b_{n+1} と b_n の関係式を求めなさい。

(2)　一般項 a_n を求めなさい。

【考え方】(1)　$b_n=\dfrac{1}{a_n+1}$ とおくということは，同時に $b_{n+1}=\dfrac{1}{a_{n+1}+1}$ ということです。これらの条件を $a_n=$～，$a_{n+1}=$～に変形し，それらを定義式に代入し，整理すると，b_{n+1} と b_n の関係式ができあがります。

［答　　案］

(1)　<u>b_{n+1} と b_n の関係式</u>

0　（定義を確認する）

$a_1=1$　…①，　　$a_{n+1}=\dfrac{a_n-1}{a_n+3}$　…②

1　（条件式を $a_n=$～，$a_{n+1}=$～の形に変形する）

$b_n=\dfrac{1}{a_n+1}$ であるから，$b_{n+1}=\dfrac{1}{a_{n+1}+1}$

それぞれの式を，a_n，a_{n+1} について解くと，

$b_n(a_n+1)=1$　　　　$b_{n+1}(a_{n+1}+1)=1$　　　◀分母を払う

$a_n+1=\dfrac{1}{b_n}$　　　　$a_{n+1}+1=\dfrac{1}{b_{n+1}}$　　　◀両辺を b_n，b_{n+1} で割る

$a_n=\dfrac{1}{b_n}-1$　　　　$a_{n+1}=\dfrac{1}{b_{n+1}}-1$　…③　　◀1を移項する

▲条件式より，$a_1=1$，$a_n+1\neq 0$ より，$b_n\neq 0$ かつ $b_{n+1}\neq 0$

（次のページへつづく）↗

□ □ 【３・漸化式と数学的帰納法　No.６（４／７）】 ー〈２枚目／２枚〉

↗（前のページからのつづき）

2 （b_{n+1}とb_n の関係式を求める）

③を定義式②に代入して，②をb_{n+1}とb_nの式で表すと，

$$\frac{1}{b_{n+1}}-1=\frac{\frac{1}{b_n}-1-1}{\frac{1}{b_n}-1+3}$$

$$\frac{1}{b_{n+1}}-1=\frac{1-2b_n}{1+2b_n}$$ ◀右辺の分母と分子にb_nをかける。

$$\frac{1}{b_{n+1}}=\frac{1-2b_n}{1+2b_n}+1$$ ◀１を移項

$$\frac{1}{b_{n+1}}=\frac{1-2b_n+1+2b_n}{1+2b_n}$$ ◀右辺を通分

$$\frac{1}{b_{n+1}}=\frac{2}{2b_n+1}$$

$$\frac{b_{n+1}}{1}=\frac{2b_n+1}{2}$$ ◀両辺の逆数をとる（比の性質を使ってもよい）

$$b_{n+1}=b_n+\frac{1}{2} \quad \cdots ④$$ ◀等差タイプの漸化式になった→No.2（1／3）

(2) **一般項a_nを求める**

3 （数列{b_n}の一般項を求める）

④から，数列｛b_n｝は，

初項　$b_1=\frac{1}{a_1+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$，　　公差　$\frac{1}{2}$

の等差数列であるから，一般項は，

$b_n=\frac{1}{2}+(n-1)\times\frac{1}{2}$　より，$b_n=\frac{n}{2}$

4 （一般項a_nを求める）

b_nを戻して，

$$\frac{1}{a_n+1}=\frac{n}{2}$$

$$\frac{a_n+1}{1}=\frac{2}{n}$$ ◀両辺の逆数をとる。

$$a_n+1=\frac{2}{n}$$

$$a_n=\frac{2}{n}-1$$ ◀１を移項

■この例題の練習・応用問題は５題あり，これらは数専ゼミの教室で学習できます。