

## 第1章 数列 2・いろいろな数列

## 5 いろいろな数列の和 (その1)

## (1/8) ■ 分数数列の和 ■

## 部分分数に分ける

## ★知識の整理★

## 【1】部分分数に分ける

$\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$  のような分母が整数の積の分数式は、分母の因数をそれぞれ分母とした分子が1の差の形に変形することができる。

$$\text{公式} \quad \frac{1}{ab} = \frac{1}{b-a} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

《具体例》

$$\text{I 型} \quad \frac{1}{n(n+2)} \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{ }} \\ \xrightarrow{=} \\ \xrightarrow{\text{ }} \end{array} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$$

(n+2) - n = 2

$$\text{II 型} \quad \frac{1}{n(n+1)} \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{ }} \\ \xrightarrow{=} \\ \xrightarrow{\text{ }} \end{array} \frac{1}{1} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

(n+1) - n = 1

$$\text{III 型} \quad \frac{2}{n(n+1)} \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{ }} \\ \xrightarrow{=} \\ \xrightarrow{\text{ }} \end{array} \frac{2}{1} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 2 \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

(n+1) - n = 1

★

$$\text{一般型} \quad \frac{2}{(3n-1)(3n+2)} \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{ }} \\ \xrightarrow{=} \\ \xrightarrow{\text{ }} \end{array} \frac{2}{3} \left( \frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2} \right)$$

(3n+2) - (3n-1) = 3

【注】このような式の変形を、「**部分分数に分ける**」といいます。

\* 【参考】分母の因数が3個の場合

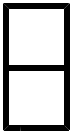
◀ No.6sで利用する。

$$(1) \quad \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{ }} \\ \xrightarrow{=} \\ \xrightarrow{\text{ }} \end{array} \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right\}$$

前から2つ      後から2つ  
(n+2) - n = 2

$$(2) \quad \frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{ }} \\ \xrightarrow{=} \\ \xrightarrow{\text{ }} \end{array} \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} - \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \right\}$$

前から2つ      後から2つ  
(2n+3) - (2n-1) = 4



## 第1章 数列 2・いろいろな数列

## 5 いろいろな数列の和 (その1)

(3/8) ■ 分数数列の和 ■

## 分数数列の和

◇ 《分数数列の和》 **学力化** → / .

★解法の技術★

次の和を求めなさい。

$$(1) \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \cdots + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$$

$$(2) \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+2} + \sqrt{k+1}}$$

【考え方】 \* 特殊な計算 ・分母に $\sqrt{\quad}$ を含む数列は、まず **分母の有理化** をする。  
 ・分数や $\sqrt{\quad}$ を含む数列の和が $\Sigma$ を使って表されているときは、**各項の和の形** に書き直す。

[答 案]

(1) **1** (一般項を部分分数に分ける)

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(3k-1)(3k+2)}$$

◀ 数列の和を $\Sigma$ で表す

$$= \sum_{k=1}^n \frac{1}{3} \left( \frac{1}{3k-1} - \frac{1}{3k+2} \right)$$

◀ 部分分数に分けた→No.6(1/8)を参照

**2** (数列の和を求める)

$$= \frac{1}{3} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{3k-1} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{3k+2} \right)$$

◀  $\Sigma$ の分配法則

$$= \frac{1}{3} \left\{ \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{3n-1} \right) \right.$$

◀  $\Sigma$ を和の形へ

$$\left. - \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{3n-1} + \frac{1}{3n+2} \right) \right\}$$

一気に消える!

$$= \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3n+2} \right)$$

◀ ( )内の後項は-であること注意

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{3n+2-2}{2(3n+2)}$$

◀ ( )内を通分

$$= \frac{n}{2(3n+2)}$$

(次のページへつづく) ↗

## □ □ 【いろいろな数列 No. 6 (3/8)】 - 〈2枚目/2枚〉

➡ (前のページからのつづき)

(2) ① (分母を有理化する)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{k+2} + \sqrt{k+1}} \\ &= \frac{\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}}{(\sqrt{k+2} + \sqrt{k+1})(\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1})} \\ &= \sqrt{k+2} - \sqrt{k+1} \end{aligned}$$

② (数列の和を求める)

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{\sqrt{k+2} + \sqrt{k+1}} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}) &< \text{分母を有理化} \\ &= \sum_{k=1}^n \sqrt{k+2} - \sum_{k=1}^n \sqrt{k+1} &< \Sigma \text{の分配法則} \\ &= \left( \sqrt{3+2} + \sqrt{5} + \dots + \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} \right) &< \Sigma \text{を和の形へ} \\ &\quad - \left( \sqrt{2} + \sqrt{3+2} + \sqrt{5} + \dots + \sqrt{n+1} \right) \\ &= \underline{\underline{\sqrt{n+2} - \sqrt{2}}} &< \text{後項は-であること注意} \end{aligned}$$

← 一気に消える!

■ この例題の練習・応用問題は6題あり、これらは数専ゼミの教室で学習できます。