発展

＊１１

第３章　図形の性質　１・三角形の性質

４ メネラウスの定理とチェバの定理（その１）

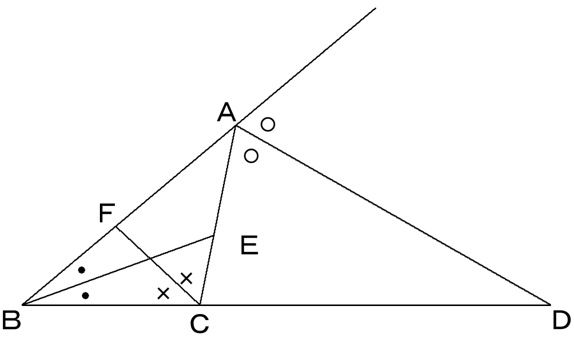
【No.１１の後で学習☆発展問題】（１／６）

メネラウスの定理の逆（証明問題）

◇《メネラウスの定理の逆（証明問題）：角の２等分線の利用》学力化➡　／　，

★解法の技術★

右の△ＡＢＣにおいて，∠Ａの外角の２等分線が辺ＢＣの延長と交わるとき，その交点をＤとする。∠Ｂ，∠Ｃの２等分線と辺ＡＣ，ＡＢの交点をそれぞれＥ，Ｆとすると，３点Ｄ，Ｅ，Ｆは１つの直線上にあることを示せ。



【考え方】結論…３点が一直線上にあること

とくに，３点が三角形の３辺（またはその延長）上にあるとき

⟹　メネラウスの定理の逆を用いる。

この問題では…

点Ｄは辺ＢＣと交わり，点Ｅは辺ＣＡと交わり，点Ｆは辺ＡＢと交わるから，△ＡＢＣと直線ＤＥＦについて，メネラウスの定理を考える。

つまり，$\dfrac{AF}{FB}\cdot\dfrac{BD}{DC}\cdot\dfrac{CE}{EA}=1$ を示せばよい。

⟹　比の条件は与えられていないから，$\dfrac{AF}{FB}$，$\dfrac{BD}{DC}$，$\dfrac{CE}{EA}$ を，それぞれ式で表すことができないか考える。　→　$\boxed{1}$を参照。

［答　　案］

$\boxed{1}$　（証明に必要な辺をおきかえる）　◀三角形の各辺の分点が作る辺の比の積＝1であることを示すため。

・ＢＥは∠Ｂの２等分線であるから，

$$\frac{BC}{BA}=\frac{CE}{EA}\quad\cdots①$$

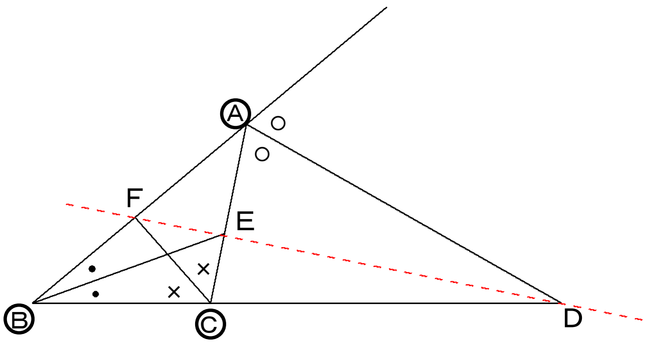
・ＣＦは∠Ｃの２等分線であるから，

$$\frac{CA}{CB}=\frac{AF}{FB}\quad\cdots②$$

・ＡＤは∠Ａの外角の２等分線であるから，

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}\quad\cdots③$$

◀三角形の外角の2等分線については，No.4（１／８）を参照



（次のページへつづく）↗

□ □　【三角形の性質　No. １１ｓ（１／６）】　－〈２枚目／２枚〉

↗（前のページからのつづき）

2　（メネラウスの定理がいえることを示す）

したがって，①×②×③より，

$$\frac{BC}{BA}\cdot\frac{CA}{CB}\cdot\frac{AB}{AC}=\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\quad\cdots④$$

▲頂角を挟む２辺の比　▲底辺の内分比

(④の左辺)＝１より，　◀④の左辺を約分すると1になる。

$$\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}=1$$

これを書きかえると，　◀メネラウスの定理の形にするため。

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$$

メネラウスの定理　→　№.１１（１／５）

3　（答をまとめる）

よって，メネラウスの定理の逆より，３点Ｄ，Ｅ，Ｆは１つの直線上にある。

発展

＊１１

第３章　図形の性質　１・三角形の性質

４ メネラウスの定理とチェバの定理（その１）

【No.１１の後で学習☆発展問題】（４／６）

◇《メネラウスの定理の逆（証明問題）：平行四辺形の性質の利用》**学力化**➡　／　，

★解法の技術★

平行四辺形ＡＢＣＤ内の１点Ｐを通り，各辺に平行線を引き，辺ＡＢ，ＣＤ，ＢＣ，ＤＡとの交点を，順にＱ，Ｒ，Ｓ，Ｔとする。２直線ＱＳ，ＲＴが点Ｏで交わるとき，３点Ｏ，Ａ，Ｃは１つの直線上にあることを示せ。

【考え方】目指すのは，△ＱＢＳと直線ＯＡＣについて，メネラウスの定理が成り立っていることを示すことである。（これを示すことで「メネラウスの定理の逆」より，３点Ｏ，Ａ，Ｃが１つの直線上のあることが示せるから。）

1. 与えられた条件下で，メネラウスの定理が成り立つ三角形と直線を見つける。三角形の各辺の分点が作る辺の比の積＝１とする。
2. 平行四辺形の性質を使って，証明に必要な辺におきかえる。
3. メネラウスの定理の逆を適用する。

三角形の３辺（またはその延長）上の３点を通る直線

［答　　案］

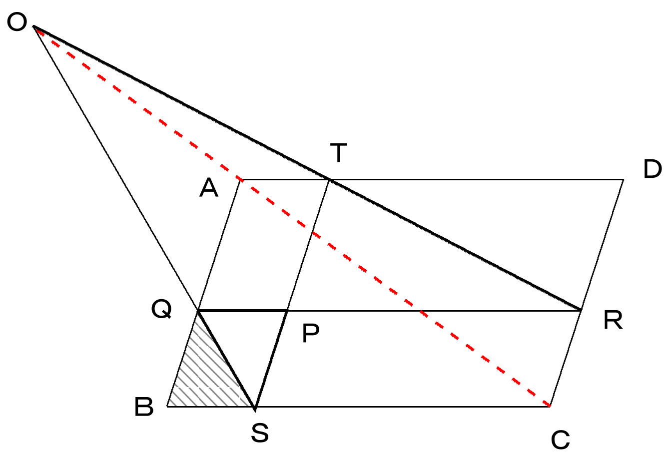
1 （メネラウスの定理が成り立つ三角形と直線を利用して公式を作る）

△ＰＱＳと直線ＯＴＲについて，メネラウスの定理により，

◀【注意】ＯＡＣは，この段階では直線であるかどうか不明。

◀重なる（共通な）分点からスタート

$$\frac{SO}{OQ}\cdot\frac{QR}{RP}\cdot\frac{PT}{TS}=1 \quad \cdots①$$



2 （証明に必要な辺におきかえる）

平行四辺形の性質から，

ＱＲ＝ＢＣ

ＲＰ＝ＣＳ

ＰＴ＝ＱＡ

ＴＳ＝ＡＢ

であるから，これらを①に代入して

$$\frac{SO}{OQ}\cdot\frac{BC}{CS}\cdot\frac{QA}{AB}=1$$

3 （メネラウスの定理がいえることを示す）

これを書きかえると，

$$\frac{SO}{OQ}\cdot\frac{QA}{AB}\cdot\frac{BC}{CS}=1$$

◀メネラウスの定理の形にするために並び変える。

◀△ＱＢＳと直線ＯＡＣについてメネラウスの定理が成り立っている。

4 （答をまとめる）

よって，メネラウスの定理の逆より，３点Ｏ，Ａ，Ｐは１つの直線上にある。

■この例題の練習・応用問題は４題あり，これらは**数専ゼミの教室**で学習できます。