

## 第2章 図形と方程式 3・軌跡と領域

## 2 不等式の表す領域 (その7)

## (1/3) ■ 通過領域の問題③ ■

## 点が動く範囲

◇ 《点が動く範囲》 学力化 → / .

## ★解法の技術★

点 $(x, y)$ が原点を中心とする半径1の円の内部を動くとき、点 $(x+y, xy)$ の動く範囲を図示せよ。

【考え方】  $x+y=X$ ,  $xy=Y$ とにおいて、点 $(X, Y)$ を満たす関係式を導けばよい。

原点を中心とする半径1の円の内部  $\rightarrow x^2+y^2 < 1$

ここで、 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ を使うと、  $\leftarrow$ 対称式を基本対称式で表す。

$x^2-2Y < 1$  すなわち  $Y > \frac{X^2}{2} - \frac{1}{2}$   $\leftarrow$ 放物線の上側の部分。

しかし、

$x^2+y^2 < 1$ であるから、 $x, y$ の値には制限があり、 $x+y=X$ ,  $xy=Y$ のとり値にも制限がつくはずである。その制限は  $x, y$ の実数条件で、次のようになる。

[1]  $x, y$ は2次方程式  $t^2 - X t + Y = 0$  の2つの解である。

[2]  $x, y$ は実数  $\iff D = X^2 - 4Y \geq 0$

$\leftarrow$ 実数は和と積に関しては閉じている。

[答 案]

0 (おきかえ)

$x+y=X$ ,  $xy=Y$ とおく。

1 (円の条件から、 $X$ と $Y$ の関係式を導く)

点 $(x, y)$ は円 $x^2+y^2=1$ の内部を動くから、 $x^2+y^2 < 1$

よって、 $(x+y)^2-2xy < 1$ であり、  $\leftarrow x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

$x^2-2Y < 1$  すなわち  $Y > \frac{X^2}{2} - \frac{1}{2}$  ...①

2 (2次方程式の実数解から、 $X$ と $Y$ の関係式を導く)

また、 $x, y$ は2次方程式  $t^2 - X t + Y = 0$  の2つの実数解であるから、判別式

を $D$ とすると、 $D = X^2 - 4Y \geq 0$  すなわち  $Y \leq \frac{X^2}{4}$  ...②

①と②から、 $X, Y$ の満たす条件は、

$$\frac{X^2}{2} - \frac{1}{2} < Y \leq \frac{X^2}{4}$$

(次のページへつづく) ↗

## □ □ 【軌跡と領域 No. 20 (1/3)】 - 〈2枚目/2枚〉

➡ (前のページからのつづき)

3 (領域を図示する)

よって、点  $(X, Y)$  すなわち点  $(x + y, xy)$  の動く範囲は、変数を  $x, y$  におきかえて、

$$\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} < y \leq \frac{x^2}{4}$$

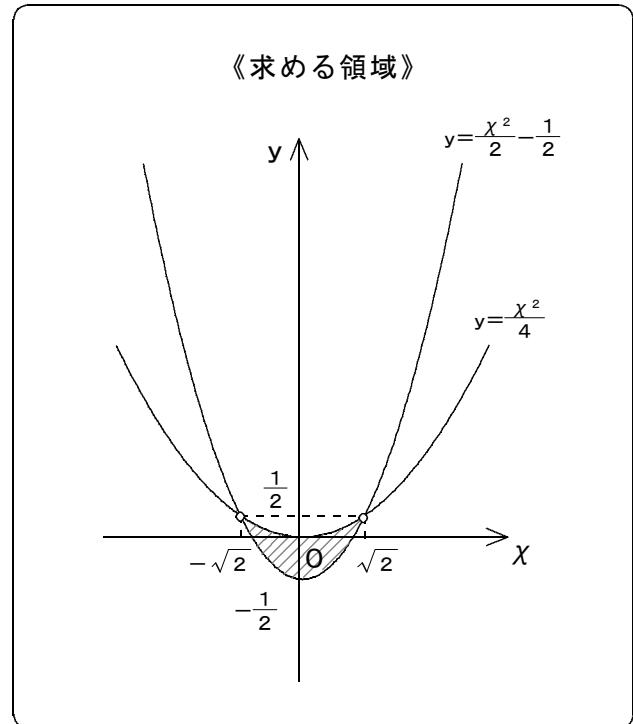
◀  $X, Y$  は問題文に与えられていないから、  
 $x, y$  におきかえて答える。

したがって、求める範囲は、右の図の斜線部分。

ただし、境界線は、

放物線  $y = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$  は含まず、

他は含む。



■この例題の練習・応用問題は2題あり、これらは数専ゼミの教室で学習できます。