発展 ＊４

第２章　図形と方程式　３・軌跡と領域
１ 軌跡　■　連動点の軌跡①　■
【No.４の後で学習☆発展問題】（１／４）

軌跡が放物線になる②

◇《軌跡が放物線になる場合②》 学力化➡　　／　　，

★解法の技術★

放物線Ｃ：$y=x^2$と直線ℓ：$y=m(x-1)$は異なる２点Ａ，Ｂで交わっている。
(1) 定数ｍの値の範囲を求めなさい。
(2) ｍの値が変化するとき，線分ＡＢの中点の軌跡を求めなさい。

【考え方】(1) 放物線と直線の方程式からｙを消去したxの２次方程式（これを①とする）の判別式をＤとすると，
放物線と直線が異なる２点で交わる　⟺　$D>0$
(2) $\boxed{1}$ 点Ｐの座標を$(x,\ y)$とおく。
$\boxed{2}$ x，ｙをそれぞれｍで表す。　◀ｍが動点（これまでの点Ｑにあたる）
$\boxed{3}$ ｍを消去してx，ｙの満たす方程式を導く。　ｍは「媒介変数」
$\boxed{4}$ このとき，(1)より，ｍに制限がつくから，軌跡は曲線の一部になる。

［答　　案］

(1) 定数ｍの値の範囲を求める

$y=x^2$と$y=m(x-1)$からｙを消去すると，

$x^2=m(x-1)$　◀交点は2つのグラフの連立

これをxについて整理して，$x^2-mx+m=0$　…①

Ｃとℓは異なる２点で交わっているから，①の判別式をＤとすると，

$D=(-m)^2-4\cdot1\cdot m=m(m-4)>0$

よって，$m<0,\ 4<m$　…②　◀動点（倍系変数）の範囲

(2) 線分ＡＢの中点の軌跡を求める

$\boxed{1}$ （定義）

線分ＡＢの中点の座標をＰ$(x,\ y)$とおく。　◀求める連動点の座標を(x, y)とおく。

$\boxed{2}$ （x，ｙを介変数（動点＝ｍ）で表す）

・２点Ａ，Ｂのx座標は，２次方程式①の異なる２つの実数の解α，βであるから，解と係数の関係から，　◀2次方程式の解と係数の関係→別紙参照

$$x=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{m}{2}\quad\cdots②$$　◀①より，$\alpha+\beta=-\frac{-m}{1}=m$

・Ｐは，直線ℓ上の点であるから，②をℓの式に代入して，

$$y=m(x-1)=m\left(\frac{m}{2}-1\right)=\frac{1}{2}m^2-m\quad\cdots③$$

（次のページへつづく）↗

□ □ 【軌跡と領域　No.４ｓ（１／４）】 ー〈２枚目／２枚〉

↗（前のページからのつづき）

3　（点Ｐの軌跡を求める）

◀媒介変数を消去して，χ，yの関係式にする。

②より，ｍ＝２χ　…②’　であるから，

②’を③に代入してｍを消去すると，

$$y=\frac{1}{2}(2\chi)^2-2\chi=2\chi^2-2\chi$$

◀ｍの動きを，
ｍとχ，yの関係式②③を使って，
χ，yの動きとして表現する。
↑これがPの軌跡を表す方程式

4　（ｍの制限からχの範囲を定める）

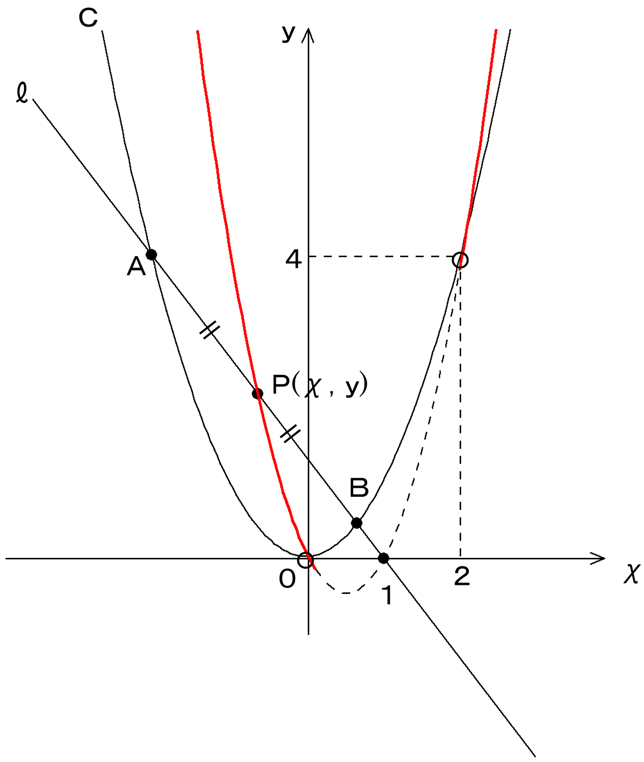
◀媒介変数の制限からχの範囲を求める。

(1)　より，ｍ＜０，４＜ｍ　であるから，
これに②’を代入すると，２χ＜０，４＜２χ
よって，χ＜０，２＜χ

5　（答をまとめる）

したがって，求める軌跡は，

放物線　$y=2\chi^2-2\chi$　の　$\chi<0$，$2<\chi$の部分



■この例題の練習・応用問題は３題あり，これらは**数専ゼミの教室**で学習できます。