1

第２章　図形と方程式　３・軌跡と領域

１ 軌跡

（１／８）■　直線・円　■

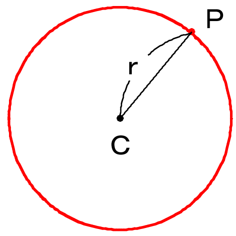
軌跡が直線や円になる

★知識の整理★

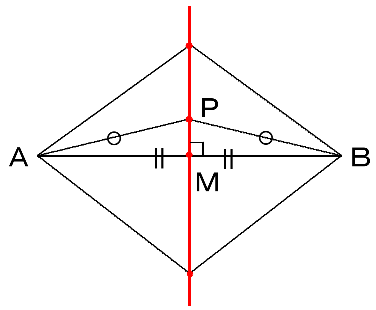
【１】軌跡

平面上で，与えられた条件を満たす点全体の集合が作る図形を，この条件を満たす点の軌跡という。

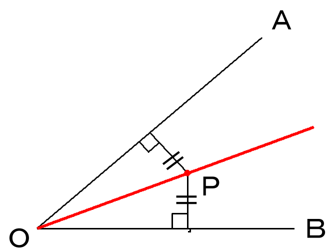
（例１）平面上で，定点Ｃから一定の距離ｒにある点Ｐの軌跡は点Ｃを中心とする半径ｒの円である。



（例２）平面上で，２定点Ａ，Ｂから等距離にある点Ｐの軌跡は線分ＡＢの垂直二等分線である。



（例３）平面上で，∠ＡＯＢの内部にあって，ＯＡ，ＯＢへの距離が等しい点Ｐの軌跡は，∠ＡＯＢの２等分線である。ただし，点Ｏを除く。



第２章　図形と方程式　３・軌跡と領域
1 軌跡
（２／８）■　直線・円　■

1

平面上の座標が与えられているとき，条件を満たす点をＰ（χ，ｙ）として，点Ｐの軌跡をχ，ｙの方程式で表すことを考えてみよう。

◇《軌跡が直線や円になる場合》学力化➡　／　，

★解法の技術★

２点Ａ（４，０），Ｂ（０，２）に対して，条件 ＡＰ＝ＢＰ を満たす点Ｐの軌跡の方程式を求めなさい。

【考え方】軌跡の求め方

1 点Ｐの座標を（χ，ｙ）とおく。
2 条件をχ，ｙの関係式で表す。
「距離についての条件」の場合は，距離を２乗する。　◀【注】を参照
3 これを整理して，χ，ｙの満たす方程式を導く。

［答　案］

1 点Ｐの座標を（χ，ｙ）とおく。

2 ＡＰ＝ＢＰより，$AP^2=BP^2$
よって，
$(\chi-4)^2+y^2=\chi^2+(y-2)^2$

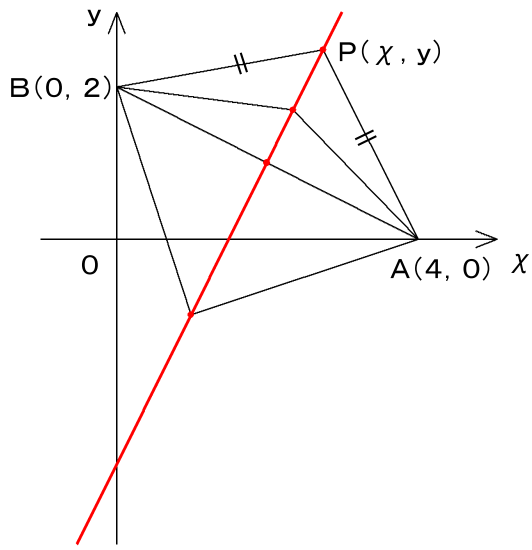
3 これを整理して，
$\chi^2-8\chi+16+y^2=\chi^2+y^2-4y+4$
$2\chi-y-3=0$

＊4 （逆に，この直線上のすべての点Ｐ（χ，ｙ）は，条件を満たす。）

▲ふつう，書かない。

5 したがって，求める軌跡は，

直線　$2\chi-y-3=0$



【注】距離を根号のついた形で求めてもいいが，両辺を２乗して根号をはずすので，最初から距離を２乗した式を作る。

■この例題の練習・応用問題は5題あり，これらは数専ゼミの教室で学習できます。

1

第２章　図形と方程式　３・軌跡と領域
1 軌跡
（３／８）■　直線・円　■

補足説明　「軌跡の求め方」の詳細

1　点Ｐの座標を（χ，ｙ）とおく。

条件を満たす点Ｐの座標を（χ，ｙ）とおくことを，宣言する。

2　条件をχ，ｙの関係式で表す。

問題に書かれている条件をχ，ｙを使って表す。

・距離についての条件　・　距離を２乗する。
・放物線の頂点についての条件　・　$y=a(\chi-p)^2+q$の形に変形する。

3　これを整理して，χ，ｙの満たす方程式を導く。

2で求めたχ，ｙの方程式を，図形が分かる形に変形する。
χ^2，y^2がある場合　⇒　円
χ^2があり，y^2がない場合　⇒　放物線
χ^2もy^2もない場合　⇒　直線

＊4　確かめ

3で求めた図形上のすべての点Ｐが，与えられた条件を満たすことを確かめる。
通常は，証明せず次のような１文を書いておくだけでよい。

（例）　「逆に，この直線上のすべての点Ｐ（χ，ｙ）は，条件を満たす。」

「証明の例」は，次ページの資料を参照。
（このような証明を書けという問題は出題されない！）

【注意】条件を満たさない点がある場合は，その点を指摘しておく。

（例）「点Ｃは除く。」とか，「線分ＡＢ上の点は除く。」など…。

5　したがって，求める軌跡は，

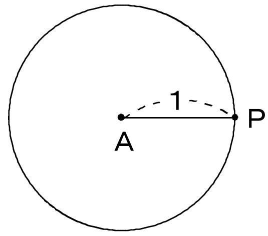
点Ｐの軌跡の形状を表す方程式を書く。

【注意】答が円の場合は，必ず中心と半径も答える。

《資料》　２９　座標平面上の点の軌跡①

❶　点Ｐがある条件Ｃを満たしながら動いてできる図形を，その条件Ｃを満たす点の軌跡という。このとき点ＰをＰを動点という。

例　平面上の定点をＡとする。点Ｐが条件$AP=1$を満たして動くとき，点Ｐの描く軌跡は，中心がＡ，半径１の円である。



❷　座標を用いて点Ｐの軌跡を求める手順は，次のようになる。

［１］　点Ｐの座標を$(\chi,\ y)$として，与えられた条件Ｃをχ，ｙの方程式で表し，この方程式の表す図形を求める。

［２］　［１］で求めた図形上のすべての点が，条件Ｃを満たしていることを確かめる。

★

２点$A(-2,\ 3)$，$B(4,\ -1)$から等距離にある点Ｐの軌跡を求めてみよう。

［答　　案］

［１］　点Ｐの座標を$(\chi,\ y)$とすると，

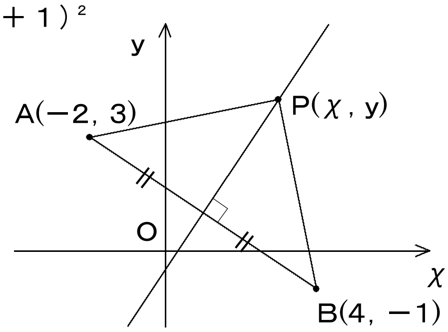
条件より，$AP=BP$であるから，$AP^2=BP^2$　◀【注】

よって，$(\chi+2)^2+(y-3)^2=(\chi-4)^2+(y+1)^2$

整理すると，$3\chi-2y-1=0$

したがって，点Ｐの軌跡は，

直線$3\chi-2y-1=0$



［２］　逆に，直線$3\chi-2y-1=0$上の点Ｐ’の座標を$(a,\ b)$とすると，$3a-2b-1=0$

よって，$b=\dfrac{3a-1}{2}$　…①

①から，$AP'^2=(a+2)^2+(b-3)^2=a^2+b^2+4a-6b+13$

$$=a^2+b^2+4a-6\cdot\frac{3a-1}{2}+13$$

$$=a^2+b^2-5a-16$$

$$BP'^2=(a-4)^2+(b+1)^2=a^2+b^2-8a+2b+17$$

$$=a^2+b^2-8a+2\cdot\frac{3a-1}{2}+17$$

$$=a^2+b^2-5a-16$$

ゆえに，$AP'^2=BP'^2$　　すなわち，$AP'=BP'$

よって，点ｐ’は２点Ａ，Ｂから等距離にある。

［１］，［２］から，点Ｐの軌跡は，直線$3\chi-2y-1=0$である。

注　逆の［２］の証明は，［１］の手順を逆にたどることによって成り立つことが明らかな場合は，省略することが多い。したがって，以後，逆は省略する。

【注】$AP^2=BP^2$は，次のように書いてもよい。

$$\sqrt{(\chi+2)^2+(y-3)^2}=\sqrt{(\chi-4)^2+(y+1)^2}$$

この式は，２乗して根号をはずすことになるから，初めから根号をはずしておいた式が$AP^2=BP^2$である。