１９

第１章　いろいろな式　３・高次方程式

6 高次方程式（その１）

（１／４）■　高次方程式③　■

複２次式の因数分解の利用

★解法の技術★

次の方程式を解きなさい。

$x^4+x^2+25=0$

【考え方】x^4+px^2+q の形の式は，$(x^2+A)(x^2+B)$ の形に因数分解できないときは，$(x^2+A)^2-(Bx)^2$ の形にもっていきます。

↑内部に「平方完成」の形をつくり，全体を「平方の差」の形に整形して因数分解する方法です。

［答　案］

$x^4+x^2+25=0$

与式の左辺を変形して，

$x^4+10x^2+5^2+x^2-10x^2=0$　◀x^4と25で平方公式を作り，加えた$10x^2$を引く

$(x^2+5)^2-(3x)^2=0$　◀a^2-b^2の形を作る

▲この部分が平方数にならないときは，平方公式を変える（真ん中の項の符号を逆にする）

$(x^2+5+3x)(x^2+5-3x)=0$　◀和と差の積の公式を利用して因数分解する

$(x^2+3x+5)(x^2-3x+5)=0$　◀(　)内の式の形を整える

・$x^2+3x+5=0$ より，　◀解の公式を使って，それぞれの方程式の解を求める

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot5}}{2\cdot1}=\frac{-3\pm\sqrt{11}i}{2}$$

・$x^2-3x+5=0$ より，

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot1\cdot5}}{2\cdot1}=\frac{3\pm\sqrt{11}i}{2}$$

よって，$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{11}i}{2}$，$\dfrac{3\pm\sqrt{11}i}{2}$

【参考】$x^4\qquad+5^2+x^2\qquad=0$

$x^4+10x^2+5^2+x^2-10x^2=0$

$x^4+10x^2+5^2-9x^2=0$

▲$(3x)^2$だから，平方数になっている。

$x^4-11x^2+1=0$

$x^4+2x^2+1-11x^2-2x^2=0$

$x^4+2x^2+1-13x^2=0$

▲平方数にならない！→方針転換！ $2x^2$の符号を逆にする。

$x^4-2x^2+1-11x^2+2x^2=0$

$x^4-2x^2+1-9x^2=0$

▲$(3x)^2$だから，平方数になっている。

■この例題の練習・応用問題は5題あり，これらは数専ゼミの教室で学習できます。