



### 相加平均と相乗平均

◇ 《相加平均と相乗平均》 **学力化** → / .

★知識の整理★

#### 【1】相加平均と相乗平均

2つの数  $a$ ,  $b$  に対して,  $\frac{a+b}{2}$  を  $a$ ,  $b$  の **相加平均** といい,  $a > 0$ ,  $b > 0$  のとき,  $\sqrt{ab}$  を  $a$ ,  $b$  の **相乗平均** という。

#### 【2】相加平均と相乗平均の関係

相加平均と相乗平均の関係については, 次の大小関係が成り立つ。

$$a > 0, b > 0 \text{ のとき, } \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

等号が成り立つのは,  $a = b$  のときである。

[証明]

$a > 0$ ,  $b > 0$  であるから,

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} &= \frac{1}{2} (a - 2\sqrt{ab} + b) \\ &= \frac{1}{2} \{(\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{ab} + (\sqrt{b})^2\} \quad \leftarrow a > 0 \text{ だから, } a = (\sqrt{a})^2 \\ &= \frac{1}{2} (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \end{aligned}$$

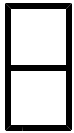
よって,  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

また, 等号が成り立つのは,  $\sqrt{a} - \sqrt{b} = 0$ , すなわち,  $a = b$  のときである。

【注】上の相加平均と相乗平均の関係は,  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$  のときも成り立つ。

\*補足

不等式  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$  は,  $a+b \geq 2\sqrt{ab}$  の形で用いられることが多い。



## 第1章 いろいろな式 2・式と証明

## 3 不等式の証明(その2)

## (2/6) ■ 相加平均と相乗平均 ■

◇《相加平均と相乗平均》**学力化**→ /

## ★解法の技術★

$a > 0$ ,  $b > 0$  のとき, 次の不等式を証明しなさい。また, 等号が成り立つときを調べなさい。

(1)  $a + \frac{9}{a} \geq 6$

(2)  $(a + b) \left( \frac{1}{a} + \frac{9}{b} \right) \geq 16$

【考え方】(1)  $a \cdot \frac{9}{a} = 9$  (定数)より,  $a$  と  $\frac{9}{a}$  に相加平均と相乗平均の関係が使える。

$$a \text{ と } b \text{ について, } a > 0, b > 0 \text{ のとき, } a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

(2) 式を展開すると, 積が定数となる2つの項が現れる。この部分に相加平均と相乗平均の関係が使える。

[答 案]

(1)  $a + \frac{9}{a} \geq 6$  の証明

1 (加える2式のそれぞれが正であることを確認)

◀正の数である確認は必ず必要

$$a > 0 \text{ より, } \frac{9}{a} > 0 \text{ であるから,}$$

2 (「相加平均 $\geq$ 相乗平均」の式を作り, それを利用して不等式を証明する)

相加平均と相乗平均の大小関係より,

$$(\text{左辺}) = a + \frac{9}{a} \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{9}{a}} = 2\sqrt{9} = 6$$

◀  $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ (等号成立は  $a=b$  のとき)

$$\text{よって, } a + \frac{9}{a} \geq 6$$

3 (等号が成り立つ場合を示す)

◀等号が成り立つ場合については, 欄外の【注】を参照

等号が成り立つのは,

$$a = \frac{9}{a}, \text{ すなわち, } a^2 = 9 \text{ のときであるから,}$$

$$a > 0 \text{ より, } \underline{a = 3} \text{ のときである。}$$

◀両辺の平方根をとった

(次のページへつづく) ↗

## □ □ 【式と証明 No. 6 (2/6)】 - 〈2枚目/2枚〉

➔ (前のページからのつづき)

(2)  $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{9}{b}\right) \geq 16$  の証明0 (左辺を「相加平均 $\geq$ 相乗平均」が使える形に変形する)

$$\begin{aligned} \text{(左辺)} &= (a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{9}{b}\right) = 1 + \frac{9a}{b} + \frac{b}{a} + 9 \\ &= \underbrace{\frac{9a}{b} + \frac{b}{a}} + 10 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

▲  $\frac{9a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 9$  (定数) より, $\frac{9a}{b}$  と  $\frac{b}{a}$  に相加平均と相乗平均の関係が使える。

1 (加える2式のそれぞれが正であることを確認)

◀ 正の数である確認は必ず必要

 $a > 0$ ,  $b > 0$  より,  $\frac{9a}{b} > 0$ ,  $\frac{b}{a} > 0$  であるから,2 (「相加平均 $\geq$ 相乗平均」の式を作り, それを利用して不等式を証明する)

相加平均と相乗平均の大小関係より,

$$\frac{9a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \sqrt{\frac{9a}{b} \cdot \frac{b}{a}} = 2 \sqrt{9} = 6$$

よって,  $\frac{9a}{b} + \frac{b}{a} \geq 6 \quad \dots \textcircled{2}$ 

②の式の両辺に10を加えて,

◀ ①の式より,

$$\frac{9a}{b} + \frac{b}{a} + 10 \geq 6 + 10 = 16$$

したがって,  $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{9}{b}\right) \geq 16$ 

3 (等号が成り立つ場合を示す)

◀ 等号が成り立つ場合については, 欄外の【注】を参照

等号が成り立つのは,

$$\frac{9a}{b} = \frac{b}{a}, \text{ すなわち, } 9a^2 = b^2 \text{ のときであるから,}$$

 $a > 0$ ,  $b > 0$  より,  $3a = b$  のときである。

◀ 両辺の平方根をとった

【注】「相加平均・相乗平均の関係」のイメージ図

1 ●  $> 0$ , ▲  $> 0$ 2 ● + ▲  $\geq 2 \sqrt{\bullet \cdot \blacktriangle} = \alpha$  ◀ ●  $\cdot$  ▲ は定数

3 等号成立は, ● = ▲ のとき

■ この例題の練習・応用問題は7題あり, これらは数専ゼミの教室で学習できます。