16

第２章　２次関数　３・２次関数と方程式・不等式

3　２次不等式の応用（その４）

（１／５）■　判別式による最大・最小(2)　■

判別式による最大・最小(2)

◇《判別式による最大・最小(2)》 学力化➡　／　,

★解法の技術★

(1)　関数 $y=2\chi^2-5\chi+1$ の値域を，この等式を満たす実数 χ が存在するような y の値の範囲として求めよ。

(2)　関数 $y=\dfrac{3\chi}{\chi^2+\chi+1}$ の値域を求めよ。

【考え方】(1)　２次関数の値域は，普通は標準形に直して求めるが，№１５同様に，実数条件（$D\geqq 0$）を利用して求める方法もある。

χ，y について整理すると，

$2\chi^2+5\chi+(1-y)=0$　◀ χ の２次方程式

ここで，χ は実数であるから，この２次方程式は実数解をもつ。したがって，**実数解をもつ⟺ $D\geqq 0$** を利用すると，y の値の範囲が求められる。

◀判別式は y についての不等式になるから。

(2)　このような分数の形をした関数は数学Ⅰの範囲外だが，(1)の方法が使える。

χ，y の等式を分母を払って，χ について整理すると，

$y\chi^2+(y-3)\chi+y=0$　◀ $y\neq 0$ のとき χ の２次方程式

χ の値は実数であるから，$y\neq 0$ のとき，$D\geqq 0$

$y=0$ のとき，判別式は使えないから，別扱いにして調べる。

［答　　案］

(1)　**関数 $y=2\chi^2-5\chi+1$ の値域を求める**

1　（与式を χ について整理する）　◀理由は【考え方】(1)を参照。

$y=2\chi^2-5\chi+1$ を χ についての２次方程式とみて整理すると，

$2\chi^2-5\chi+(1-y)=0$

2　（実数解条件を使って，y の範囲を求める）

χ は実数であるから，この χ の２次方程式は実数解をもつ。　◀ $D\geqq 0$ となるという意味。

したがって，この２次方程式の判別式を D とすると，

$$D=(-5)^2-4\cdot 2\cdot(1-y)$$
$$=17+8y$$

$D\geqq 0$ より，$17+8y\geqq 0$ であるから，$y\geqq-\dfrac{17}{8}$

3　（答をまとめる）

よって，求める値域は　$y\geqq-\dfrac{17}{8}$

（次のページへつづく）↗

｜メニューへ戻る｜

↗（前のページからのつづき）

(2)　**関数 $y=\dfrac{3\chi}{\chi^2+\chi+1}$ の値域を求める**

◀ y を k とみなすとNo.１５と同じ問題になる。
値域を求めるとは，最小値と最大値を求めることと同じ。

1　（与式を χ について整理する）　◀理由は【考え方】(1) (2) を参照。

χ が実数のとき，与式の分母について，

$$\chi^2+\chi+1=\chi^2+\chi+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1$$

◀平方完成（分母が０でないことを確認するため）

$$=\left(\chi+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\neq 0$$

◀（分母）≠０であるから分母を払うことができる。

$y=\dfrac{3\chi}{\chi^2+\chi+1}$ の両辺に $\chi^2+\chi+1$ をかけて，

$$y(\chi^2+\chi+1)=3\chi$$

χ について整理すると，

$$y\chi^2+(y-3)\chi+y=0 \quad \cdots ①$$

◀この方程式が実数解 χ をもつ条件を求める。

2　（実数解条件を使って，y の範囲を求める）

（ｉ）　$y\neq 0$ のとき，

χ は実数であるから，χ の２次方程式①は実数解をもつ。　◀D≧０となるという意味。

したがって，２次方程式①の判別式をＤとすると，

$$\begin{aligned} D&=(y-3)^2-4\cdot y\cdot y\\ &=y^2-6y+9-4y^2\\ &=-3y^2-6y+9\\ &=-3(y^2+2y-3)=-3(y+3)(y-1)\end{aligned}$$

$D\geqq 0$ より，$-3(y+3)(y-1)\geqq 0$ であるから，$(y+3)(y-1)\leqq 0$

よって，$y\neq 0$ に注意して解くと，$-3\leqq y<0$，$0<y\leqq 1$　◀ $y\neq 0$

（ⅱ）　$y=0$ のとき，

①は $3\chi=0$ となり，実数解 $\chi=0$ をもつ。　◀y＝０のときも実数解をもつ。

3　（答をまとめる）

（ｉ），（ⅱ）から，求める値域は　$-3\leqq y\leqq 1$

■この例題の練習・応用問題は４題あり，これらは**数専ゼミの教室**で学習できます。