



1 5

第2章 2次関数 3・2次関数と方程式・不等式

3 2次不等式の応用(その4)

(1/5) ■ 判別式による最大・最小(1) ■

判別式による最大・最小(1)

◇ 《判別式による最大・最小(1)》 学力化 →

★解法の技術★

実数 x, y が $x^2 + (y-1)^2 = 5$ を満たすとき、 $2x - y$ の最大値と最小値、およびそのときの x, y の値を求めよ。 [類 法政大]

【考え方】条件つき2変数関数の最大・最小の問題では、条件の式を使って文字を減らす、というのが解法の基本である。

しかし、この問題のように、条件式 $x^2 + (y-1)^2 = 5$ を x または y について解き、 $2x - y$ に代入しようとする...

たとえば、 $x^2 + (y-1)^2 = 5$ を x について解いて、 $x = \pm \sqrt{5 - (y-1)^2}$ これを $2x - y$ に代入して、 $2(\pm \sqrt{5 - (y-1)^2}) - y$ となると、まず、解けない。

そこで、逆に、 $2x - y = k$ とおき、これを条件式とみて文字を減らす。

y を消去すると、 $x^2 + (2x - k - 1)^2 = 5$ これは x の2次方程式である。

ここで、 x は実数であるから、この2次方程式は実数解をもつ。 したがって、実数解をもつ $\Leftrightarrow D \geq 0$ を利用すると、 k つまり $2x - y$ の値の範囲が求められる。 ↑ $\leftarrow D$ をとっていい理由

[答 案]

① (文字を減らす)

$2x - y = k$ とおき、 y について解くと、 $\leftarrow x, y$ が実数だから k も実数

$$y = 2x - k \quad \dots \textcircled{1}$$

これを $x^2 + (y-1)^2 = 5$ に代入すると、

$$x^2 + (2x - k - 1)^2 = 5$$

整理して、

$$x^2 + (2x)^2 + (-k)^2 + (-1)^2 + 2 \cdot 2x \cdot (-k) + 2 \cdot (-k) \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) \cdot 2x - 5 = 0$$

$$x^2 + 4x^2 + k^2 + 1 - 4kx + 2k - 4x - 5 = 0$$

$$\underline{5x^2 - 4(k+1)x + k^2 + 2k - 4 = 0} \quad \dots \textcircled{2}$$

(次のページへつづく) →

□ □ 【 2次関数と方程式・不等式 No. 15 (1/5) 】 - 〈2枚目/2枚〉

➡ (前のページからのつづき)

2 (実数解条件を使って、kの範囲を求める)

xは実数であるから、xの2次方程式②は実数解をもつ。

したがって、2次方程式②の判別式をDとすると、

$$\begin{aligned}\frac{D}{4} &= \{-2(k+1)\}^2 - 5(k^2 + 2k - 4) \\ &= 4k^2 + 8k + 4 - 5k^2 - 10k + 20 \\ &= -k^2 - 2k + 24 \\ &= -(k^2 + 2k - 24) = -(k+6)(k-4)\end{aligned}$$

D ≥ 0より、-(k+6)(k-4) ≥ 0であるから、(k+6)(k-4) ≤ 0

よって、-6 ≤ k ≤ 4

したがって、2x - yは、最小値-6、最大値4

◀ k = 2x - y

◀ D ≥ 0となるという意味。

3 (xとyの値を求める)

k = -6, 4のとき、D = 0で、②は重解 $x = -\frac{-4(k+1)}{2 \cdot 5} = \frac{2(k+1)}{5}$ をもつ。

$$\cdot k = 4 \text{ のとき, } x = \frac{2(4+1)}{5} = 2$$

①から、 $y = 2 \times (2) - (4) = 0$

$$\cdot k = -6 \text{ のとき, } x = \frac{2(-6+1)}{5} = -2$$

①から、 $y = 2 \times (-2) - (-6) = 2$

◀ $a x^2 + b x + c = 0$ の重解は、 $x = \frac{-b}{2a}$
--

4 (答をまとめる)

以上から、 $x = 2, y = 0$ のとき最大値4 $x = -2, y = 2$ のとき最小値-6

をとる。

■この例題の練習・応用問題は4題あり、これらは数専ゼミの教室で学習できます。