「共通因数」の指導をめぐって(2)

数専ゼミ | 数学教育研究所 |

共通因数を括り出すとは？

－割り出すのであって，（　）の前に移動するのではない－

因数分解の最初の操作は，共通因数を（　）の外に括り出すことです。
分配法則の逆の操作で，多項式のそれぞれの項に共通の因数を（　）の外に「割り出す」操作のことです。分配法則がかけ入れるのだから，その反対の操作ですから，「割り出す」のは当然なのですが…
割り出すのだから，（　）の中にはその共通因数で割った商が残ります。
という操作で共通因数の問題は解決！
…というわけにはいかない生徒がわっと出ます。

見える共通因数と見えない共通因数

共通因数には「見える共通因数」と「見えない共通因数」とがあります。
「見えない共通因数」は，式の中に隠れている共通因数を見えるようにする必要があります。生徒にとっては，その操作に難しさがあるように思えます。

共通因数の型分け

共通因数が「見えるかどうか」という観点から，
共通因数を括り出す操作を，次のように型分けしてみました。

(1) 共通因数が単項式

$2a^2b^3+6ab^2$

＊共通因数は見えますが，よりはっきりと見えるようにするために共通部分を単項式の内部で分離させます。

$2ab^2\times ab+2ab^2\times 3$

$=2ab^2(ab+3)$

(2) 共通因数が多項式

①共通因数が見えるもの

（ａ－ｂ）χ＋（ａ－ｂ）ｙ
＝（ａ－ｂ）（χ＋ｙ）

＊ここでの誤答は，（ａ－ｂ）χ＋ｙが圧倒的です。
因数分解の意味が分かっていないまちがいです。
多項式が多項式のままで，因数の積の形に変形されていません。

②共通因数は見えるが，商が見えないもの

（ａ－ｂ）χ－（ａ－ｂ）
＝（ａ－ｂ）（χ－１）

＊ここでの難しさは，（ａ－ｂ）の係数が１であること。
（ａ－ｂ）χ　という形でごまかしてしまう生徒も出ます。
－は消えるのですね。そんなルールをどこからもってくるやら？(-_-;)
①の問題をクリアした生徒でも（ａ－ｂ）χ－１という落とし穴にきちんとはまる子もけっこう出ます。

見えない「ー1」(共通因数)をあぶり出す!

次は，いよいよ「共通因数が見えない」ものです。
式をじっと見つめるだけで「固まってしまう」生徒が続出します。
「指導のうで」の見せ所です。

③共通因数が見えないもの（商も見えない）

ａｃ＋ｂｃ＋ａ＋ｂ
＝（ａ＋ｂ）ｃ＋（ａ＋ｂ）
＝（ａ＋ｂ）（ｃ＋１）

ここでは，１本目の式で（ａ＋ｂ）がかたまりとして「見える」かどうかが解けるかどうかの分かれ目になります。

▲ To Top Page

$\underline{ac+bc}+\underline{a+b}$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$c(a+b)+(a+b)$

（ａ＋ｂ）を１つのかたまりとしておさえた瞬間に，それが共通因数だということが見抜けます。

$$
\begin{aligned}
&(\chi+y)\chi-\chi-y\\
&=(\chi+y)\chi-(\chi+y)\\
&=(\chi+y)(\chi-1)
\end{aligned}
$$

これは，かなり難しい。
次のように考えます。
与式の（χ＋ｙ）χの部分を見て，（χ＋ｙ）というかたまりは共通因数としてくくり出せるかもしれない，と考えます。
すると，式のどこかに（χ＋ｙ）という因数がつくれる部分があるはずだと考えます。
－χ－ｙに注目します。なぜなら，χとｙという（χ＋ｙ）と同じ文字でできている多項式であるからです。そこで，各項から－１を割り出して，－（χ＋ｙ）という形の式を作ります。

この操作は，生徒にとっては教師が思っているほど易しくはないようで，分配法則と対比させ，その逆の操作をするのだということを示してあげなければなりません。しかも，（　）の中にはわり算をしたときの商が残ることも分かりやすい例を使って納得させておかなくては，生徒はこの操作を理解できません。

（例）　$2(3\chi+4y)$

$\downarrow$ 分配法則（かっこの中にかけ入れる）

$=2\times3\chi+2\times4y$

$\downarrow$ 共通因数（かっこの外へ割り出す）

$=2(\underbrace{3\chi}_{\text{商}}+\underbrace{4y}_{\text{商}})$

ここまでは，なんとかたどり着いた生徒でも，

$(\chi+y)\chi-1$

とコケる生徒もけっこう出ます。
このようにコケる生徒には，次のようなさらに細かなステップをふんで教える必要があります。

▲ To Top Page

$$
\begin{aligned}
&(\chi+y)\chi-\chi-y\\
=&(\chi+y)\chi-(\chi+y)\\
=&\{(\chi+y)\chi-1(\chi+y)\}\\
=&(\chi+y)\{\chi-1\}\\
=&(\chi+y)(\chi-1)
\end{aligned}
$$

この２つのステップを加えます。

$$
\begin{aligned}
&-ab+ac-c+b\\
=&ac-ab-c+b\\
=&a(c-b)-(c-b)\\
=&(c-b)(a-1)
\end{aligned}
$$

＊《別解》

$$
\begin{aligned}
=&-a(b-c)+(b-c)\\
=&(b-c)(-a+1)\\
=&(b-c)(1-a)
\end{aligned}
$$

公立レベルでここまでできる生徒はあまりいません。
しかし，ひとつ上の問題をやった後ですと，$-c+b=-(c-b)$ がイメージできますから，これをもとに，前の２つの項から$(c-b)$という因数が作れそうだ，という予想を立てることができます。
共通因数のａを括り出すだけでこの因数が見えますから…。
しかし，現実問題としては，$-ab+ac$の項を入れかえるという操作に気づかないと$(c-b)$という因数は見えてきません。だから，ほとんどの生徒はここで足踏みをすることになります。

ー1を括り出す思考プロセスを形成する教材

このように見てくると，この種のタイプの因数分解の問題を解くには，
$-c+b=-(c-b)$というような「－１を括り出す操作」に習熟していなければならないことがわかります。
だから，共通因数の学習をする前に，「－１を括り出す操作」に習熟させるための学習プログラムを入れておく必要があるのです。

「－１を括り出す操作」に習熟させるための学習教材の紹介です。

Link ▶ | 学習プリント：多項式・№１９ｓへ |

▲ To Top Page