４

第１章　数列　３・漸化式と数学的帰納法

１ 漸化式（その３）

（１／７）■　階差タイプ　■

階差数列（復習）

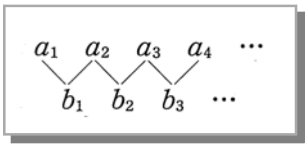
★知識の整理★

【１】階差数列とは？

数列{ａ ₙ}に対して，

$b_n = a_{n+1} - a_n$ （ｎ＝１，２，３，…）

で与えられる数列{ｂ ₙ}を，数列{ａ ₙ}の **階差数列** という。

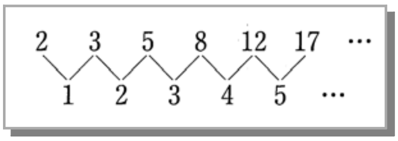


（例）数列　２，３，５，８，１２，１７，…の階差数列

この数列の階差数列は

１，２，３，４，５，…

となり，初項１，公差１の等差数列である。



【２】階差数列からもとの数列の一般項を求める

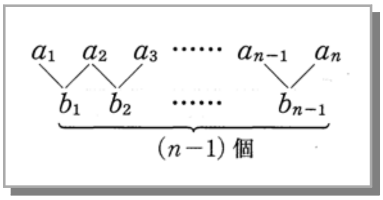
数列{ａ ₙ}の階差数列を数列{ｂ ₙ}とすると，

$a_2 - a_1 = b_1$
$a_3 - a_2 = b_2$
$a_4 - a_3 = b_3$
……………
$a_n - a_{n-1} = b_{n-1}$

これらの式の各辺をそれぞれ加えると，$n \geqq 2$ のとき，

$$a_n - a_1 = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots\cdots + b_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

よって，　$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$



したがって、次のことが成り立つ。

▶階差数列と一般項

数列{ａ ₙ}の階差数列を数列{ｂ ₙ}とすると，

ｎ≧２のとき，　$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$

＊ａ＝１のときも成り立つかどうかは，

ａ ₙの式にｎ＝１を代入して与えられたａ ₁と等しくなるか確認する。

4

第１章　数列　３・漸化式と数学的帰納法
1 漸化式（その３）
（２／７）■　階差タイプ　■

$a_{n+1}=a_n+f(n)$

★解法の技術★

$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+4n$
で定義される数列の一般項 a_n を求めなさい。

【考え方】漸化式が $a_{n+1}-a_n=$（nの入った式）の形に変形されるときは，
▲階差
その数列の一般項は階差数列を用いて求めることができる。

［考える手順］	［答　　案］
1 階差数列を作る	1 $b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと，$b_n=4n$
2 階差数列からもとの数列の一般項を求める(n≧２の場合)	2 $\{b_n\}$ は $\{a_n\}$ の階差数列であるから，$n\geqq 2$ のとき， $a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$ $=1+\sum_{k=1}^{n-1}4k$ $=1+4\sum_{k=1}^{n-1}k$ $=1+4\times\frac{1}{2}(n-1)\{(n-1)+1\}$ $=2n^2-2n+1$ …①
3 n＝1の場合も成り立つことを示す。	3 また，①に $n=1$ を代入すると， $a_1=2\cdot 1^2-2\cdot 1+1=1$ となり，$n=1$ のときも成り立つ。
4 答を書く	4 よって，$\underline{a_n=2n^2-2n+1}$

３・漸化式と数学的帰納法　No.４（２／７）

《資料》 《階差タイプの漸化式》の具体例

$$19 = \boxed{3} + (\underbrace{1+3+5+7}_{\sum_{k=1}^{5-1} b_k})$$

$\{a_n\}$: $\boxed{3}$,　４,　７,　１２,　**１９**,　…

$\{b_n\}$: $\underbrace{1,\ 3,\ 5,\ 7}$,　…　,　２ｎ－１

$$a_5 = a_1 + \sum_{k=1}^{5-1} b_k$$

$$= 3 + \sum_{k=1}^{5-1} (2k-1)$$

$$= 3 + 2\sum_{k=1}^{4} k - \sum_{k=1}^{4} 1$$

$$= 3 + 2 \times \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (4+1) - 4$$

$$= 3 + 20 - 4$$

$$= 19$$

4

第１章　数列　３・漸化式と数学的帰納法
1 漸化式（その３）
（３／７）■　階差タイプ　■

◇《階差タイプ》**学力化**➡　　／　，

★理解のチェック★

次の漸化式で決定される数列の一般項 a_n を求めなさい。

(1)　$a_1=3$，　$a_{n+1}=a_n+4n$

(2)　$a_1=5$，　$a_{n+1}=a_n+2n+4$

(3)　$a_1=2$，　$a_{n+1}=a_n+6n^2+4n+2$

［答　　案］

4

第１章　数列　３・漸化式と数学的帰納法

1 漸化式（その３）

（４／７）■　階差タイプ　■

◇《階差タイプ》学力化➡　／　，

★演習★【１】

次の条件によって定まる数列｛a_n｝の一般項を求めなさい。

(1) $a_1=2$，$a_{n+1}=a_n+2n$

(2) $a_1=2$，$a_{n+1}=a_n+3n^2$

(3) $a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+2^n$

【考え方】(3) 2^n は等比数列の和になる。

$2^n=2\cdot 2^{n-1}$ より，初項２，公比２の等比数列である。

階差数列は，ｎ－１項を加えるので，等比数列の項数はｎ－１である！

［答　　案］