第１章　数列　３・漸化式と数学的帰納法

1 漸化式（その２）

（１／９）■　特性方程式タイプ　■

$a_{n+1}=pa_n+q$（その１）―考え方―

★解法の技術★

次のように定義される数列の一般項 a_n を求めなさい。

$a_1=4$，　$a_{n+1}-1=5(a_n-1)$

【考え方】等比（$a_{n+1}=ra_n$）タイプ

$a_1=a$，　$a_{n+1}=ra_n$（$n=1$，２，３，…）

で定義される数列は，初項 a，公比 r の等比数列である。

よって，一般項は，　$a_n=ar^{n-1}$

［考える手順］

1 数列 $\{a_n-1\}$ の定義と一般項

2 一般項 a_n

［答　　案］

数列 $\{a_n-1\}$ は，初項 $a_1-1=4-1=3$，公比５の等比数列であるから，

$$a_n-1=3\cdot 5^{n-1}$$

よって，　$a_n=3\cdot 5^{n-1}+1$

◇《特性方程式タイプの考え方》学力化➡　　／　　,

★理解のチェック★

次のように定義される数列の一般項 a_n を求めなさい。

$a_1=2$，　$a_{n+1}+3=-4(a_n+3)$

［答　　案］

３

第１章　数列　３・漸化式と数学的帰納法

１ 漸化式（その２）

（２／９）■　特性方程式タイプ　■

◇《特性方程式タイプの考え方》学力化➡　　／　，

★演習★【１】

次の漸化式で決定される数列の第ｎ項a_nを求めなさい。

(1)　$a_1 = 10$，$a_{n+1} - 3 = 5(a_n - 3)$

(2)　$a_1 = 12$，$a_{n+1} + 4 = 2(a_n + 4)$

［答　　案］

第１章　数列　３・漸化式と数学的帰納法

３　**1** 漸化式（その２）

（３／９）■　特性方程式タイプ　■

$a_{n+1}=pa_n+q$（その２）

★知識の整理★

【１】 $a_{n+1}=pa_n+q$ の形の漸化式

$a_1=3$，$a_{n+1}=3a_n-4$ で定義される数列 $\{a_n\}$ は，

$3,\ 5,\ 11,\ 29,\ \cdots$

である。この数列の各項から２を引いてできる数列 $\{a_n-2\}$ は，

$1,\ 3,\ 9,\ 27,\ \cdots$

となるが，この数列は初項１，公比３の等比数列となっている。

したがって，数列 $\{a_n-2\}$ の一般項は，$a_n-2=1\cdot3^{n-1}$ となり，

$a_n=3^{n-1}+2$

一般に，p，q が０でない定数で $p\neq1$ のとき，漸化式が，

$a_{n+1}=pa_n+q$　　　…①

で表される数列 $\{a_n\}$ について，

$a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$　…②

となる α を見つけることができれば，数列 $\{a_n-\alpha\}$ は，初項 $a_1-\alpha$，公比 p の等比数列となる。このことを利用して数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めることができる。

この α を求めるには，①－②を考えて，$\alpha=p\alpha+q$ を解けばよい。

（例）　$a_{n+1}=3a_n-2$ を変形する。

$$
\begin{array}{rl}
 & a_{n+1}=3a_n-2 \\
-) & a_{n+1}-\alpha=3(a_n-\alpha) \\ \hline
 & \alpha=-2+3\alpha \\
 & \alpha=1
\end{array}
$$

よって，$a_{n+1}-1=3(a_n-1)$

3

第１章　数列　３・漸化式と数学的帰納法

1 漸化式（その２）

（４／９）■　特性方程式タイプ　■

◇《特性方程式型》**学力化**➡　　／　，

★解法の技術★

次の漸化式で決定される数列の第ｎ項 a_n を求めなさい。

$a_1=10,\quad a_{n+1}=5a_n-12$

［考える手順］

［答　　案］

$a_1=10$　　…①

$a_{n+1}=5a_n-12$　　…②

1 等比型漸化式に変形

②が，

$a_{n+1}-\alpha=5(a_n-\alpha)$　　…③

と変形できたとする。

欄外参照▶

②－③より，

$$\begin{array}{rrl} & a_{n+1} & =5a_n-12 \\ -) & a_{n+1}-\alpha & =5(a_n-\alpha) \\ \hline & \alpha & =-12+5\alpha \\ & \alpha & =3 \end{array}$$

◀これが特性方程式

③で，$\alpha=3$ のとき，

$a_{n+1}-3=5(a_n-3)$　　…④

◀等比型漸化式になった！

2 おきかえて一般項 b_n を求める

④で，$a_n-3=b_n$ とおくと，

$b_{n+1}=5b_n$　　…⑤

⑤から，$\{b_n\}$ は，

初項　$b_1=a_1-3=10-3=7$，　公比　５

の等比数列であるから，一般項は，

$b_n=7\cdot 5^{n-1}$

3 一般項 a_n を求める

b_n を戻して

$a_n-3=7\cdot 5^{n-1}$

－３を移項して，

$\underline{a_n=7\cdot 5^{n-1}+3}$

▶1の部分は，次のようにして求めることもできます。

③を展開して整理すると，

$a_{n+1}=5a_n-4\alpha$　　…②’

②と②’を比較して，

$-4\alpha=-12$

◀これが特性方程式

$\alpha=3$

（次のページへつづく）↗

□ □ 【３・漸化式と数学的帰納法 No.３（４／９）】 ー〈２枚目／２枚〉

↗（前のページからのつづき）

◇《特性方程式型》**学力化**➡ ／ ，

---- ★理解のチェック★ ----

次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めなさい。

(1) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 5a_n + 8$ (2) $a_1 = 4$, $a_{n+1} = -2a_n + 3$

［答 案］

３

第１章　数列　３・漸化式と数学的帰納法

１ 漸化式（その２）

（５／９）■　特性方程式タイプ　■

◇《特性方程式タイプ》学力化➡　　／　，

★演習★【２】

次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めなさい。

(1)　$a_1=2$，$a_{n+1}=2a_n-1$　　(2)　$a_1=-3$，$a_{n+1}=4a_n+3$

［答　　案］