

第1章 数列 3・漸化式と数学的帰納法

1 漸化式(その2)

(1/9) ■ 特性方程式タイプ ■

$$a_{n+1} = pa_n + q \text{ (その1) - 考え方 -}$$

★解法の技術★

次のように定義される数列の一般項 a_n を求めなさい。

$$a_1 = 4, \quad a_{n+1} - 1 = 5(a_n - 1)$$

【考え方】等比 ($a_{n+1} = r a_n$) タイプ

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = r a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定義される数列は、初項 a 、公比 r の等比数列である。

よって、一般項は、 $a_n = a r^{n-1}$

[考える手順]

1 数列 $\{a_n - 1\}$ の定義
と一般項

2 一般項 a_n

[答 案]

数列 $\{a_n - 1\}$ は、初項 $a_1 - 1 = 4 - 1 = 3$ 、公比 5 の等比数列であるから、

$$a_n - 1 = 3 \cdot 5^{n-1}$$

よって、 $a_n = 3 \cdot 5^{n-1} + 1$

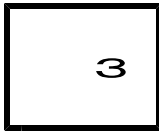
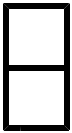
◇ 《特性方程式タイプの考え方》 **学力化** → / ,

----- ★理解のチェック★ -----

次のように定義される数列の一般項 a_n を求めなさい。

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} + 3 = -4(a_n + 3)$$

[答 案]



第1章 数列 3・漸化式と数学的帰納法

1 漸化式(その2)

(2/9) ■ 特性方程式タイプ ■

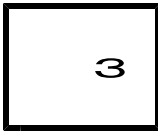
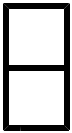
◇ 《特性方程式タイプの考え方》 **学力化** → /

★演習★【1】

次の漸化式で決定される数列の第 n 項 a_n を求めなさい。

- (1) $a_1 = 10, a_{n+1} - 3 = 5(a_n - 3)$
 (2) $a_1 = 12, a_{n+1} + 4 = 2(a_n + 4)$

[答 案]



第1章 数列 3・漸化式と数学的帰納法

1 漸化式 (その2)

(3/9) ■ 特性方程式タイプ ■

$$a_{n+1} = pa_n + q \text{ (その2)}$$

★知識の整理★

【1】 $a_{n+1} = pa_n + q$ の形の漸化式

$a_1 = 3$, $a_{n+1} = 3a_n - 4$ で定義される数列 $\{a_n\}$ は、

$$3, 5, 11, 29, \dots$$

である。この数列の各項から2を引いてできる数列 $\{a_n - 2\}$ は、

$$1, 3, 9, 27, \dots$$

となるが、この数列は初項1, 公比3の等比数列となっている。

したがって、数列 $\{a_n - 2\}$ の一般項は、 $a_n - 2 = 1 \cdot 3^{n-1}$ となり、

$$a_n = 3^{n-1} + 2$$

一般に、 p, q が0でない定数で $p \neq 1$ のとき、漸化式が、

$$a_{n+1} = pa_n + q \quad \dots \textcircled{1}$$

で表される数列 $\{a_n\}$ について、

$$a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha) \quad \dots \textcircled{2}$$

となる α を見つけることができれば、数列 $\{a_n - \alpha\}$ は、初項 $a_1 - \alpha$, 公比 p の等比数列となる。このことを利用して数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めることができる。

この α を求めるには、 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ を考えて、 $\alpha = p\alpha + q$ を解けばよい。

(例) $a_{n+1} = 3a_n - 2$ を変形する。

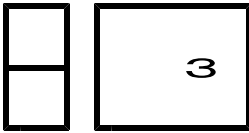
$$a_{n+1} = 3a_n - 2$$

$$-) a_{n+1} - \alpha = 3(a_n - \alpha)$$

$$\alpha = -2 + 3\alpha$$

$$\alpha = 1$$

よって、 $a_{n+1} - 1 = 3(a_n - 1)$



第1章 数列 3・漸化式と数学的帰納法

1 漸化式(その2)

(4/9) ■ 特性方程式タイプ ■

◇ 《特性方程式型》 **学力化** → /

★解法の技術★

次の漸化式で決定される数列の第 n 項 a_n を求めなさい。

$$a_1 = 10, \quad a_{n+1} = 5a_n - 12$$

[考える手順]

1 等比型漸化式に変形

欄外参照 ▶

2 おきかえて一般項 b_n を求める

3 一般項 a_n を求める

[答 案]

$$a_1 = 10 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$a_{n+1} = 5a_n - 12 \quad \dots \textcircled{2}$$

②が,

$$a_{n+1} - \alpha = 5(a_n - \alpha) \quad \dots \textcircled{3}$$

と変形できたとする。

②-③より,

$$\begin{cases} a_{n+1} = 5a_n - 12 \\ -) a_{n+1} - \alpha = 5(a_n - \alpha) \\ \hline \alpha = -12 + 5\alpha \quad \leftarrow \text{これが特性方程式} \\ \alpha = 3 \end{cases}$$

③で, $\alpha = 3$ のとき,

$$a_{n+1} - 3 = 5(a_n - 3) \quad \dots \textcircled{4} \quad \leftarrow \text{等比型漸化式になった!}$$

④で, $a_n - 3 = b_n$ とおくと,

$$b_{n+1} = 5b_n \quad \dots \textcircled{5}$$

⑤から, $\{b_n\}$ は,

$$\text{初項 } b_1 = a_1 - 3 = 10 - 3 = 7, \quad \text{公比 } 5$$

の等比数列であるから, 一般項は,

$$b_n = 7 \cdot 5^{n-1}$$

b_n を戻して

$$a_n - 3 = 7 \cdot 5^{n-1}$$

-3 を移項して,

$$a_n = 7 \cdot 5^{n-1} + 3$$

▶ 1の部分は, 次のようにして求めることもできます。

③を展開して整理すると,

$$a_{n+1} = 5a_n - 4\alpha \quad \dots \textcircled{2}'$$

②と②' を比較して,

$$-4\alpha = -12$$

◀これが特性方程式

$$\alpha = 3$$

□ □ 【 3 ・ 漸化式と数学的帰納法 No. 3 (4 / 9) 】 - < 2 枚目 / 2 枚 >

↗ (前のページからのつづき)

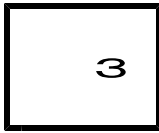
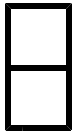
◇ 《 特性方程式型 》 **学力化** → / ,

----- ★ 理解のチェック ★ -----

次の条件によって定まる数列 $\{ a_n \}$ の一般項を求めなさい。

(1) $a_1 = 1, a_{n+1} = 5a_n + 8$ (2) $a_1 = 4, a_{n+1} = -2a_n + 3$

[答 案]



第1章 数列 3・漸化式と数学的帰納法

1 漸化式(その2)

(5/9) ■ 特性方程式タイプ ■

◇ 《特性方程式タイプ》 **学力化** → / ,

★演習★【2】

次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めなさい。

(1) $a_1 = 2, a_{n+1} = 2a_n - 1$

(2) $a_1 = -3, a_{n+1} = 4a_n + 3$

[答 案]