

## 第1章 数列 2・いろいろな数列

## 5 いろいろな数列の和 (その1)

## (1/7) ■ 分数数列の和 ■

## 分数数列の和

## ★知識の整理★

## 【1】部分分数に分ける

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

このような分母が整数の積である分数式の数列の和は、その分数式を、差の形に変形して求めます。

次の公式を使って、それぞれの項を積の形から差の形に変形します。

$$\frac{1}{a b} = \frac{1}{b-a} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{(例) (1)} \quad \frac{1}{k(k+2)} &= \frac{1}{(k+2)-k} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(2)} \quad \frac{1}{k(k+1)} &= \frac{1}{(k+1)-k} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \frac{1}{1} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \end{aligned}$$

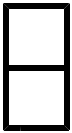
$$\begin{aligned} \text{(3)} \quad \frac{2}{k(k+1)} &= 2 \left\{ \frac{1}{k(k+1)} \right\} = 2 \left\{ \frac{1}{(k+1)-k} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \right\} \\ &= 2 \left\{ \frac{1}{1} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \right\} \\ &= 2 \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \end{aligned}$$

【注】このような式の変形を、「部分分数に分ける」といいます。

## 【2】分数の数列の和を求める手順

- (1) 公式を使って、それぞれの項を 部分分数 に分ける。
- (2) 消える部分を消し、残った部分を計算する。

- \* 特殊な計算
- ・分母に $\sqrt{\quad}$ を含む数列は、まず 分母の有理化 をする。
  - ・分数や $\sqrt{\quad}$ を含む数列の和が $\Sigma$ を使って表されているときは、各項の和の形 に書き直す。



## 第1章 数列 2・いろいろな数列

## 5 いろいろな数列の和 (その1)

## (2/7) ■ 分数数列の和 ■

## ★解法の技術★

次の和を求めなさい。

$$(1) \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \dots + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$$

$$(2) \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+2} + \sqrt{k+1}}$$

【考え方】分数の数列の和を求める手順

- (1) 公式を使って、それぞれの項を **部分分数** に分ける。
- (2) 消える部分を消し、残った部分を計算する。

- \* **特殊な計算**
- ・分母に $\sqrt{\quad}$ を含む数列は、まず **分母の有理化** をする。
  - ・分数や $\sqrt{\quad}$ を含む数列の和が $\Sigma$ を使って表されているときは、**各項の和の形** に書き直す。

[答 案]

$$(1) \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{1}{(3n+2)-(3n-1)} \left( \frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2} \right) \quad \leftarrow \text{部分分数化}$$

$$= \frac{1}{3} \left( \frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2} \right)$$

であるから、

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(3k-1)(3k+2)} \quad \leftarrow \text{和を}\Sigma\text{を使って表す}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{1}{3} \left( \frac{1}{3k-1} - \frac{1}{3k+2} \right) \quad \leftarrow \text{文字は } k \text{ を使う}$$

$$= \frac{1}{3} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{3k-1} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{3k+2} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \left\{ \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{3n-1} \right) \right. \quad \leftarrow \Sigma \text{を和の形に戻す}$$

$$\left. - \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{3n-1} + \frac{1}{3n+2} \right) \right\}$$

← 一気に消える!

$$= \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3n+2} \right) \quad \leftarrow ( ) \text{内の後項は } - \text{であること注意}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{3n+2-2}{2(3n+2)} \quad \leftarrow \text{通分}$$

$$= \frac{n}{2(3n+2)}$$

(次のページへつづく) ↗

## □ □ 【いろいろな数列 No. 6 (2/7)】 - &lt;2枚目/2枚&gt;

➡ (前のページからのつづき)

$$(2) \frac{1}{\sqrt{k+2} + \sqrt{k+1}}$$

$$= \frac{\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}}{(\sqrt{k+2} + \sqrt{k+1})(\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1})}$$

$$= \sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}$$

◀ 分母の有理化

であるから,

$$\sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{\sqrt{k+2} + \sqrt{k+1}} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1})$$

$$= \sum_{k=1}^n \sqrt{k+2} - \sum_{k=1}^n \sqrt{k+1}$$

一気に消える!

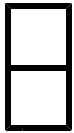
$$= \underbrace{(\sqrt{3} + 2 + \sqrt{5} + \dots + \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2})}_{\text{Σを和の形に戻す}}$$

$$- \underbrace{(\sqrt{2} + \sqrt{3} + 2 + \sqrt{5} + \dots + \sqrt{n+1})}_{\text{後項は-であること注意}}$$

$$= \sqrt{n+2} - \sqrt{2}$$

◀ Σを和の形に戻す

◀ 後項は-であること注意



## 第1章 数列 2・いろいろな数列

## 5 いろいろな数列の和 (その1)

## (3/7) ■ 分数数列の和 ■

◇ 《分数数列の和》 **学力化** → / ,

----- ★理解のチェック★ -----

次の和を求めなさい。

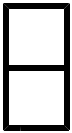
$$(1) \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$(2) \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$(3) \frac{1}{4 \cdot 6} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{6 \cdot 8} + \cdots + \frac{1}{(n+3)(n+5)}$$

$$(4) \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$$

-----  
[答 案]



## 第1章 数列 2・いろいろな数列

## 5 いろいろな数列の和 (その1)

(4/7) ■ 分数数列の和 ■

◇ 《分数数列の和》 **学力化** → / ,

## ★演習★【1】

次の和を求めなさい。

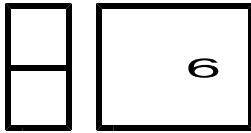
(1) 
$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

(2) 
$$\frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 8} + \cdots + \frac{1}{2n(2n+2)}$$

(3) 
$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+2)}$$

(4) 
$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}}$$

[答 案]



## 第1章 数列 2・いろいろな数列

## 5 いろいろな数列の和 (その1)

## (5/7) ■ 分数数列の和 ■

◇ 《分数数列の和》 **学力化** → / ,

## ★演習★【2】

次の和を求めなさい。

$$(1) \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \cdots + \frac{1}{(n+2)(n+3)}$$

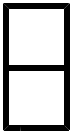
$$(2) \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

$$(3) \frac{1}{1 \cdot 7} + \frac{1}{4 \cdot 10} + \frac{1}{7 \cdot 13} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+4)}$$

$$(4) \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$$

【考え方】(4) 分母の有理化をするために、いったん $\Sigma$ を使って表す。

[答 案]



第1章 数列 2・いろいろな数列

5 いろいろな数列の和 (その1)

(6/7) ■ 分数数列の和 ■

◇ 《分数数列の和》 **学力化** → / ,

★演習★【3】

次の和を求めなさい。

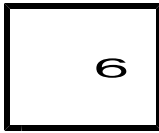
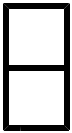
$$(1) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 + 3k + 2}$$

$$(2) 1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \cdots + \frac{1}{1+2+3+4+\cdots+n}$$

【考え方】(1) 分母を因数分解すると、部分分数に分けることができる。

(2) 各項が数列の和で表されている場合は、まず、一般項を考える。(kで表す)  
次に、和をΣを使って表し、分母が連続した整数の積のとき、部分分数に分ける。

[答 案]



第1章 数列 2・いろいろな数列

**5** いろいろな数列の和（その1）

（7 / 7） ■ 分数数列の和 ■

◇ 《分数数列の和》 **学力化** → / ,

★演習★【4】

次の和を求めなさい。

$$\sum_{k=1}^{99} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}$$

【考え方】  $\Sigma$  の計算の部分は、No. 6（5 / 7）（4）と同じタイプの問題

[答 案]