6

第１章　数列　２・いろいろな数列

5 いろいろな数列の和（その１）

（１／７）■　分数数列の和　■

分数数列の和

★知識の整理★

【１】部分分数に分ける

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

このような分母が整数の積である分数式の数列の和は，その分数式を，差の形 に変形して求めます。

次の公式を使って，それぞれの項を積の形から差の形に変形します。

$$\frac{1}{ab}=\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

（例）(1)

$$\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{(k+2)-k}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

(2)

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{(k+1)-k}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

(3)

$$\frac{2}{k(k+1)}$$

$$=2\left\{\frac{1}{k(k+1)}\right\}=2\left\{\frac{1}{(k+1)-k}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\right\}$$

$$=2\left\{\frac{1}{1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\right\}$$

$$=2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

【注】このような式の変形を，「**部分分数に分ける**」といいます。

【２】分数の数列の和を求める手順

(1) 公式を使って，それぞれの項を **部分分数** に分ける。

(2) 消える部分を消し，残った部分を計算する。

＊特殊な計算　・分母に$\sqrt{\ }$ を含む数列は，まず **分母の有理化** をする。

・分数や$\sqrt{\ }$ を含む数列の和がΣを使って表されているときは，**各項の和の形** に書き直す。

6

第１章　数列　２・いろいろな数列
5 いろいろな数列の和（その１）
（２／７）■　分数数列の和　■

★解法の技術★

次の和を求めなさい。

(1) $\dfrac{1}{2\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 8}+\dfrac{1}{8\cdot 11}+\cdots+\dfrac{1}{(3n-1)(3n+2)}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1}}$

【考え方】分数の数列の和を求める手順
(1) 公式を使って，それぞれの項を **部分分数** に分ける。
(2) 消える部分を消し，残った部分を計算する。

＊特殊な計算　・分母に$\sqrt{\ }$ を含む数列は，まず **分母の有理化** をする。
・分数や$\sqrt{\ }$ を含む数列の和がΣを使って表されているときは，**各項の和の形** に書き直す。

［答　　案］

(1) $\dfrac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\dfrac{1}{(3n+2)-(3n-1)}\left(\dfrac{1}{3n-1}-\dfrac{1}{3n+2}\right)$ ◀部分分数化

$=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3n-1}-\dfrac{1}{3n+2}\right)$

であるから，

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k-1)(3k+2)}$ ◀和をΣを使って表す

$=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k-1}-\frac{1}{3k+2}\right)$ ◀文字は k を使う

$=\dfrac{1}{3}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3k-1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3k+2}\right)$

一気に消える！

$=\dfrac{1}{3}\left\{\left(\dfrac{1}{2}+\underbrace{\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{8}+\cdots+\dfrac{1}{3n-1}}\right)\right.$ ◀Σを和の形に戻す

$\left.-\left(\underbrace{\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{8}+\cdots+\dfrac{1}{3n-1}}+\dfrac{1}{3n+2}\right)\right\}$

$=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3n+2}\right)$ ◀(　)内の後項は－であること注意

$=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3n+2-2}{2(3n+2)}$ ◀通分

$=\dfrac{n}{2(3n+2)}$

（次のページへつづく）

□ □ 【いろいろな数列 **No. 6**（２／７）】 ー〈２枚目／２枚〉

↗（前のページからのつづき）

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1}}$

$$=\frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}}{(\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})}$$ ◀分母の有理化

$$=\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}$$

であるから，

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1}}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})$$

一気に消える！

$$=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k+2}-\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k+1}$$

$$=(\sqrt{3}+2+\sqrt{5}+\cdots+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2})$$ ◀Σを和の形に戻す

$$-(\sqrt{2}+\sqrt{3}+2+\sqrt{5}+\cdots+\sqrt{n+1})$$

$$=\sqrt{n+2}-\sqrt{2}$$ ◀後項は－であること注意

6

第１章　数列　２・いろいろな数列

5 いろいろな数列の和（その１）

（３／７）■　分数数列の和　■

◇《分数数列の和》学力化➡　　／　，

★理解のチェック★

次の和を求めなさい。

(1) $\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 5}+\cdots+\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$

(2) $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

(3) $\dfrac{1}{4\cdot 6}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\dfrac{1}{6\cdot 8}+\cdots+\dfrac{1}{(n+3)(n+5)}$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$

［答　　案］

6

第１章　数列　２・いろいろな数列
5 いろいろな数列の和（その１）
（４／７）■　分数数列の和　■

◇《分数数列の和》 学力化➡　／　,

★演習★【１】

次の和を求めなさい。

(1) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}$

(2) $\dfrac{1}{2\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 6}+\dfrac{1}{6\cdot 8}+\cdots+\dfrac{1}{2n(2n+2)}$

(3) $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 4}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+2)}$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}$

［答　　案］

6

第１章　数列　２・いろいろな数列

5 いろいろな数列の和（その１）

（５／７）■　分数数列の和　■

◇《分数数列の和》学力化➡　　／　，

★演習★【２】

次の和を求めなさい。

(1) $\dfrac{1}{3\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 6}+\cdots+\dfrac{1}{(n+2)(n+3)}$

(2) $\dfrac{1}{1\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 7}+\dfrac{1}{7\cdot 10}+\cdots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

(3) $\dfrac{1}{1\cdot 7}+\dfrac{1}{4\cdot 10}+\dfrac{1}{7\cdot 13}+\cdots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+4)}$

(4) $\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

【考え方】(4) 分母の有理化をするために，いったんΣを使って表す。

［答　　案］

6

第１章　数列　２・いろいろな数列

5 いろいろな数列の和（その１）

（６／７）■　分数数列の和　■

◇《分数数列の和》**学力化**➡　　／　，

★演習★【３】

次の和を求めなさい。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+3k+2}$

(2) $1+\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\dfrac{1}{1+2+3+4}+\cdots+\dfrac{1}{1+2+3+4+\cdots+n}$

【考え方】(1) 分母を因数分解すると，部分分数に分けることができる。

(2) 各項が数列の和で表されている場合は，まず，一般項を考える。（ｋで表す）次に，和をΣを使って表し，分母が連続した整数の積のとき，部分分数に分ける。

［答　　案］

６

第１章　数列　２・いろいろな数列

５ いろいろな数列の和（その１）

（７／７）■　分数数列の和　■

◇《分数数列の和》学力化➡　　／　，

★演習★【４】

次の和を求めなさい。

$$\sum_{k=1}^{99} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$$

【考え方】Σの計算の部分は，№６（５／７）(4) と同じタイプの問題

［答　　案］