発展 ＊１２

第３章　三角関数　２・三角関数の加法定理

3 三角関数の合成（その２）

【No.１２の後で学習☆発展問題】（１／７）

三角関数の最大・最小②

★解法の技術★

関数 $f(\theta)=3\sin^2\theta+4\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta-\cos^2\theta\ \left(\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\dfrac{3}{4}\pi\right)$ の最大値，最小値とそのときの θ の値を求めなさい。

【考え方】$\sin^2\theta$，$\cos^2\theta$，$\sin\theta\cos\theta$ を含む関数

半角の公式や２倍角の公式　$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$ を利用して，$\cos 2\theta$，$\sin 2\theta$ の式に直し，$r\sin(2\theta+\alpha)$ の形に変形する。
つまり，公式を使って関数の次数をさげて，２θ に統一し，その後，合成する。

＊半角の公式　$\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{2}$，　$\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1+\cos\alpha}{2}$

$\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$，　$\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$

＊２倍角の公式　$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

[考える手順]	[答　案]
0　２θ に統一する	$f(\theta)=3\sin^2\theta+4\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta-\cos^2\theta$ $=3\cdot\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}+2\sqrt{3}\sin 2\theta-\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$ $=\underline{2\sqrt{3}\sin 2\theta-2\cos 2\theta}+1$ ▲この部分だけを合成する
1　sinに合成する	$f(\theta)=4\sin\left(2\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)+1$　…①　◀図を思い浮かべて…P($2\sqrt{3}$，-2) ▲三角関数の合成の方法→プリントNo.１１（１／６）
2　範囲を更新する	$\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\dfrac{3}{4}\pi$ より $\dfrac{\pi}{2}\leqq 2\theta<\dfrac{3}{2}\pi$　◀辺々×２ $\dfrac{\pi}{3}\leqq 2\theta-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{4}{3}\pi$　…②　◀辺々$-\dfrac{\pi}{6}$

（次のページへつづく）↗

□ □ 【三角関数の加法定理 No. １２s （１／７）】 －〈２枚目／２枚〉

（前のページからのつづき）

3 $f(\theta)$の最大値と最小値を求める

②の範囲で，①がとりうる値の範囲は，

右図より，　◀単位円を利用する

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \leqq \sin\left(2\theta-\frac{\pi}{6}\right) \leqq 1$$ より，　◀sin はy座標

$$-2\sqrt{3} \leqq 4\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{6}\right) \leqq 4$$ ◀辺々×4

$$1-2\sqrt{3} \leqq 4\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{6}\right)+1 \leqq 5 \quad \cdots③$$ ◀辺々＋1

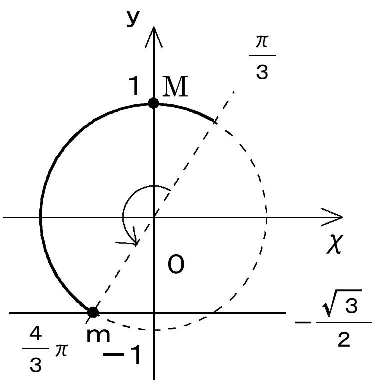
であるから，

$2\theta-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$ のとき，最大値５

$2\theta-\frac{\pi}{6}=\frac{4}{3}\pi$ のとき，

最小値 $1-2\sqrt{3}$

をとる。



4 θの値を求める

$f(\theta)$が最大値，最小値をとるときのθの値を求めると，

（ⅰ）　$2\theta-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$ のとき，

$2\theta=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}$ より，　$\theta=\frac{\pi}{3}$

（ⅱ）　$2\theta-\frac{\pi}{6}=\frac{4}{3}\pi$ のとき，

$2\theta=\frac{4}{3}\pi+\frac{\pi}{6}$ より，　$\theta=\frac{3}{4}\pi$

5 答を書く

よって，

$\theta=\frac{\pi}{3}$ のとき，最大値５，　$\theta=\frac{3}{4}\pi$ のとき，最小値 $1-2\sqrt{3}$

【注】 **3** と **4** を１つにまとめて書くこともできます。
（ただし，この場合には，解法の流れがこれまでのフォームと変わることに留意しておきましょう。）

発展 ＊１２

第３章　三角関数　２・三角関数の加法定理

3 三角関数の合成（その２）

【№.１２の後で学習☆発展問題】（２／７）

◇《三角関数の最大・最小②》 学力化➡　／　，

★理解のチェック★

次の関数の最大値と最小値，およびそのときの θ の値を求めなさい。

$y = 3\sin^2\theta + 4\sin\theta\cos\theta - \cos^2\theta \quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$

［考える手順］　［答　案］

$\boxed{0}$ 2θ に統一する

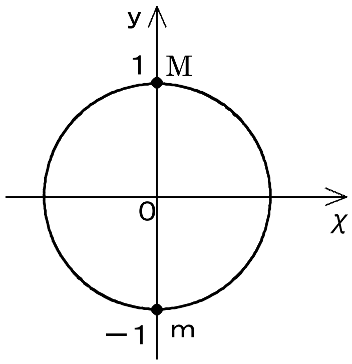
$y = 3\sin^2\theta + 4\sin\theta\cos\theta - \cos^2\theta$

$\boxed{1}$ sinに合成する

◀図をかいて求める(メモでよい)

$\boxed{2}$ 範囲を更新する

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より，



$\boxed{3}$ 最大値と最小値

この範囲で，右図より，

（次のページへつづく）↗

□ □ 【三角関数の加法定理 No.１２s（２／７）】 ー〈２枚目／２枚〉

↗（前のページからのつづき）

4 θ の値と答

よって，右図より，

・

$\theta =$ ______

・

$\theta =$ ______

発展

＊１２

第３章　三角関数　２・三角関数の加法定理

３ 三角関数の合成（その２）

【No.１２の後で学習☆発展問題】（３／７）

◇《三角関数の最大・最小②》 学力化➡　　／　　，

◇発展演習◇【 1 】

次の関数の最大値と最小値，およびそのときの χ の値を求めなさい。

$y = \sin^2\chi + 2\sqrt{3}\sin\chi\cos\chi + 3\cos^2\chi \quad (0 \leqq \chi < 2\pi)$

［考える手順］

0　2χに統一する

1　sinに合成する

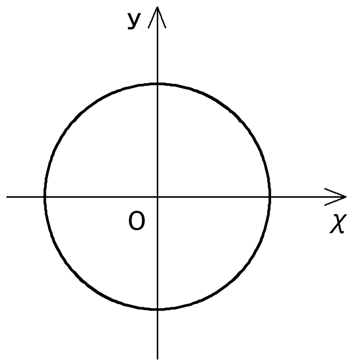
2　範囲を更新する

3　最大値と最小値

4　χの値と答

［答　　案］

$y = \sin^2\chi + 2\sqrt{3}\sin\chi\cos\chi + 3\cos^2\chi$



発展 ＊１２

第３章　三角関数　２・三角関数の加法定理

3 三角関数の合成（その２）

【No.１２の後で学習☆発展問題】（４／７）

★解法の技術★

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ とする。$y=\sin 2\theta + 2(\sin\theta + \cos\theta)$ について，

(1)　$t=\sin\theta+\cos\theta$ とおいて，y を t の関数で表しなさい。

(2)　t のとりうる値の範囲を求めなさい。

(3)　y の最大値，最小値と，そのときの θ の値を求めなさい。

【考え方】ここでは，$\sin\theta+\cos\theta$ のように，２つ以上の三角関数をまとめて１文字におくパターンである。ただし，角は１つに統一しておく。置き換えたら範囲に注意する。

(1)　$\sin\theta+\cos\theta$ から $\sin 2\theta$ を作り出すことを考える。
$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ が使えるように…。

(2)　$\sin\theta+\cos\theta$ は，$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$ として値の範囲を求める。

［考える手順］

0　$t=\sin x+\cos x$ として，yをtで表す

1　sinに合成する

2　t の範囲を求める

［答　　案］

(1)　$t=\sin\theta+\cos\theta$　…①　より，

$t^2=(\sin\theta+\cos\theta)^2$　◀両辺を２乗することで，２倍角の公式が使えるようになる

$t^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$t^2=1+\sin 2\theta$

したがって，$\sin 2\theta = t^2-1$　…②

①，②を与式に代入して，

$y=(t^2-1)+2t=\underline{t^2+2t-1}$

(2)　$t=\sin\theta+\cos\theta$　より，

$t=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$　…③　◀sinに合成

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より，　◀置き換えたら必ず範囲を確認する！

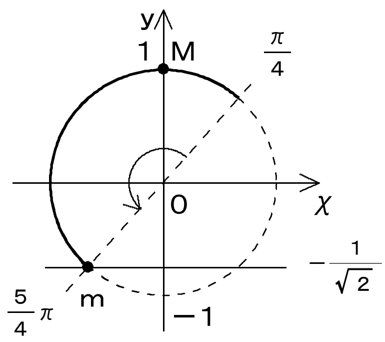
$\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta+\dfrac{\pi}{4} \leqq \dfrac{5}{4}\pi$　◀辺々 $+\dfrac{\pi}{4}$

この範囲で，t がとりうる値を求めると，右図より，

$-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq \sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right) \leqq 1$

$-1 \leqq \sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right) \leqq \sqrt{2}$

▲辺々 $\times\sqrt{2}$



であるから，$\underline{-1 \leqq t \leqq \sqrt{2}}$

（次のページへつづく）↗

□ □ 【三角関数の加法定理　No．１２ｓ（４／７）】 －〈２枚目／２枚〉

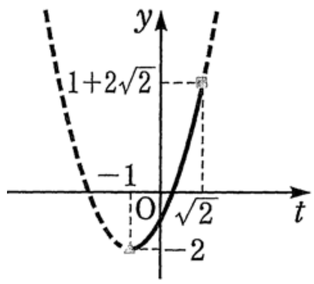
↗（前のページからのつづき）

3 yの最大値，最小値を求める

(3)　$y = t^2 + 2t - 1$ ◀(1)より

$y = (t+1)^2 - 2 \quad (-1 \leqq t \leqq \sqrt{2})$ ◀平方完成

このグラフは右図のようになる。



グラフより，

$t = \sqrt{2}$ のとき，最大値　$1 + 2\sqrt{2}$

$t = -1$ のとき，最小値　-2

をとる。

4 θの値を求める

yが最大値，最小値をとるときのθの値を求めると，

（ｉ）$t = \sqrt{2}$ のとき，③より，

$\sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ であるから，

$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = 1$ ◀辺々÷$\sqrt{2}$， sinはy座標

これより，$\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$，　$\theta = \frac{\pi}{4}$

（ii）$t = -1$ のとき，③より，

$\sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = -1$ であるから，

$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ◀辺々÷$\sqrt{2}$， sinはy座標

これより，$\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{5}{4}\pi$，　$\theta = \pi$ ◀$0 \leqq \theta \leqq \pi$ に注意

5 答を書く

よって，

$\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき，最大値 $1 + 2\sqrt{2}$，　$\theta = \pi$ のとき，最小値 -2

発展
＊１２

第３章　三角関数　２・三角関数の加法定理

3 三角関数の合成（その２）

【No.１２の後で学習☆発展問題】（５／７）

◇《三角関数の最大・最小②》 学力化➡　　／　　，

★理解のチェック★

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ とする。$f(\theta)=2\cos\theta-\sin 2\theta-2\sin\theta+1$ について，

(1)　$t=\sin\theta-\cos\theta$ とおくとき，$f(\theta)$ を t の式で表しなさい。

(2)　t のとりうる値の範囲を求めなさい。

(3)　$f(\theta)$ の最大値，最小値と，そのときの θ の値を求めなさい。

【考え方】★解法の技術★と同じ考え方で答案を書いてみましょう。

［考える手順］

［答　　案］

0　$t=\sin\chi-\cos\chi$ として，yをtで表す

(1)　$t=\sin\theta-\cos\theta$　…①より，

◀何をしていいか分からないときは，両辺を２乗してみる。

1　sinに合成する

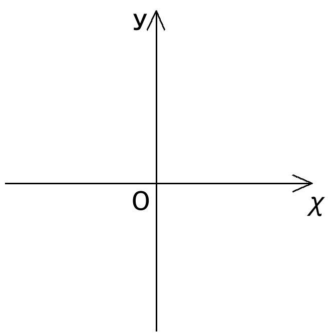
(2)　$t=\sin\theta-\cos\theta$　より，

2　t の範囲を求める

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より，

◀置き換えたら必ず範囲を確認する！

この範囲で，右図より，



よって，＿＿＿＿＿＿＿＿

（次のページへつづく）↗

□ □ 【三角関数の加法定理 No.１２s（５／７）】 ー〈２枚目／２枚〉

（前のページからのつづき）

3 yの最大値，最小値

(3) $f(\theta)=$

このグラフは右図のようになる。

グラフより，

4 θ の値を求める

（ｉ）

（ii）

5 答を書く

よって，

発展

＊１２

第３章　三角関数　２・三角関数の加法定理

３ 三角関数の合成（その２）

【No.１２の後で学習☆発展問題】（６／７）

◇《三角関数の最大・最小②》 学力化➡　　／　，

◇発展演習◇【２】

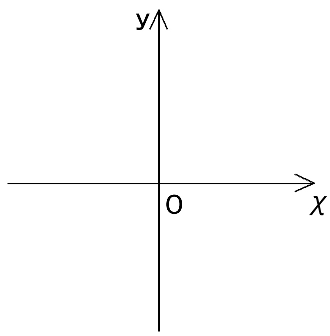
関数 $y=2\sin\chi\cos\chi-(\sin\chi+\cos\chi)+3$ について，

(1) $\sin\chi+\cos\chi=t$ として，y を t で表しなさい。

(2) t のとりうる値の範囲を求めなさい。

(3) y の最大値と最小値を求めなさい。

【考え方】θ が χ に変わっていますが，χ を θ とみなすことでまったく同じ手順で解けます。χ に条件がついていないので，最大値や最小値をとるとき，χ の値を調べる必要はありません。

[考える手順]	[答　　案]
0 $t=\sin\chi+\cos\chi$ として，yをtで表す	(1)
1 sinに合成する	(2)
2 t の範囲を求める	右図より，  よって，＿＿＿＿＿＿

（次のページへつづく）↗

□ □ 【三角関数の加法定理 No.１２s（６／７）】 ー〈２枚目／２枚〉

（前のページからのつづき）

3 yの最大値，最小値	(3)
4 答を書く	よって，

発展 ＊１２

第３章　三角関数　２・三角関数の加法定理

３ 三角関数の合成（その２）

【No.１２の後で学習☆発展問題】（７／７）

◇《三角関数の最大・最小②》 学力化➡　　／　，

◇発展演習◇【３】

次の関数の最大値と最小値を求めなさい。

$$y=\sqrt{2}(\sin\chi+\cos\chi)-\sin\chi\cos\chi-1$$

【考え方】$\sin\chi+\cos\chi=t$ とおいて，y を t で表す。t の変域に注意。

前の問題と同じ手順で解けます。よく研究しながら，この問題を解きましょう。

［考える手順］　［答　　案］

0 $t=\sin\chi+\cos\chi$ として，yをtで表す

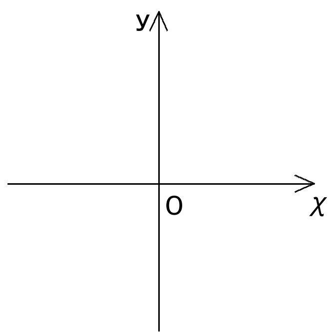
(1)

1 sinに合成する

(2)

2 t の範囲を求める

右図より，



（次のページへつづく）↗

□ □ 【三角関数の加法定理 No.１２ｓ（７／７）】 －〈２枚目／２枚〉

（前のページからのつづき）

3 yの最大値，最小値

(3)

4 答を書く

よって，