質問日　平成27年1月20日（火）　受験生

質問へのお答え

数専ゼミ数学教育研究所・通信教育指導部

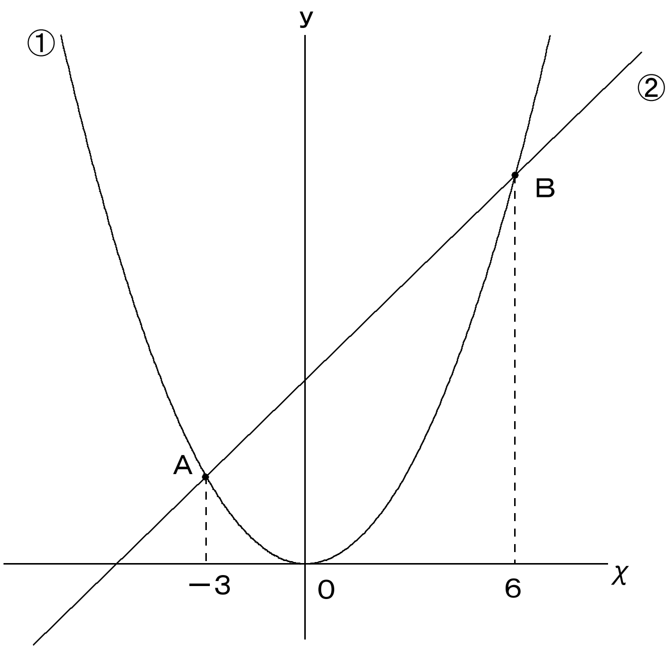
質問の内容

　右の図において，①は関数 $y=a\chi^2$ のグラフで，②は傾きが１の直線である。①と②は２点Ａ，Ｂで交わり，点Ａ，Ｂの χ 座標はそれぞれ－３，６である。

(1)　定数ａの値を求めよ。

(2)　直線②がｙ軸と交わる点の座標を求めよ。

(3)　線分ＯＢ上に点Ｃをとり，点Ａと点Ｃを通る直線を ℓ とする。三角形ＡＢＣの面積が２１となるとき，直線 ℓ の式を求めよ。



質問へのお答え　　　　印刷

ご質問ありがとうございます。以下のように解いてみました。

☆　☆　☆

［答　　案］

(1)　$y=a\chi^2$ のａは，２次関数の変化の割合を表します。

　また，１次関数 $y=a\chi+b$ のａは，グラフの傾きであると同時にこの関数の変化の割合を表します。

　問題より，－３から６までの②のグラフの傾きが１であるということは変化の割合が１であるということであり，同時に①の２次関数の変化の割合も１であるというを意味します。

　そこで，$y=a\chi^2$ で，χ が－３から６まで増加するときの変化の割合を求め，これを１と置きこの方程式を解いてａの値を求めます。

$$\frac{36a-9a}{6-(-3)}=1 \quad \text{より，これを解いて } a=\frac{1}{3}$$

答　$a=\dfrac{1}{3}$

＊変化の割合というのは，χ が１増えた時のｙの増加量で，－３から６までの χ の増加量でそのときのｙの増加量を割って求めます。

(2)　点ＡとＢの座標が分かると連立方程式でこの２点を通る直線の式を求めることができるのでまず，①の式を使って，点ＡとＢの座標を求めます。

(2)　(1)より①の式は $y=\dfrac{1}{3}\chi^2$

・点Ａの座標：点Ａの χ の座標は－３だから，これを①の式に代入して

$$y=\frac{1}{3}\times(-3)^2=3,\ \text{よって}\quad A\ (-3,\ 3)$$

・点Ｂの座標：点Ｂのχの座標は６だから，これを①の式に代入して

$$y=\frac{1}{3}\times(6)^2=12,\ \text{よって}\quad B\ (6,\ 12)$$

求める直線②の式を$y=a\chi+b$とすると

$$\begin{array}{rrl} & 3 = & -3a+b \\ -) & 12 = & 6a+b \\ \hline & -9 = & -9a \\ & 1 = & a \end{array}$$

$3=-3\times(1)+b$

$6=b$

よって，$(a,\ b)=(1,\ 6)$

$y=\chi+6$

この直線$y=\chi+6$のｙ切片が，直線②がｙ軸と交わる点の座標である。

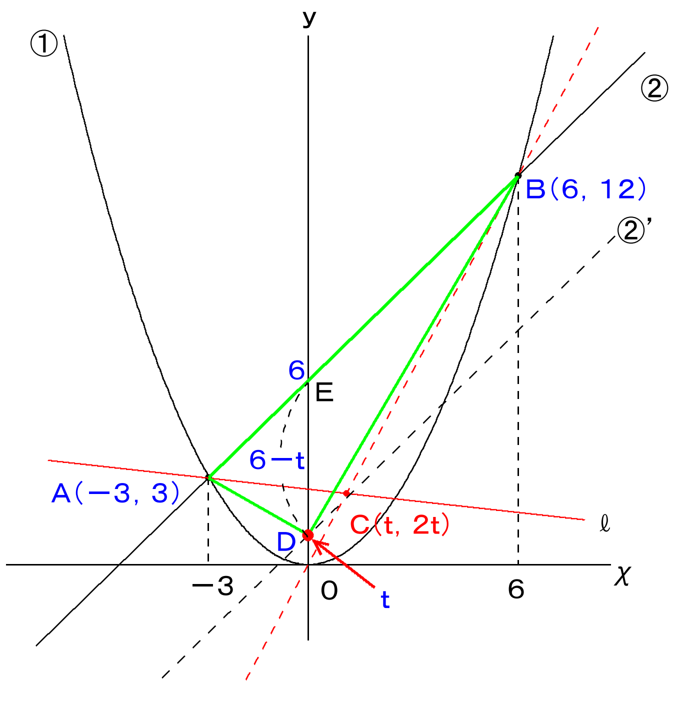
答（０，６）

(3) 直線ℓは，点Ａ（－３，３）と点Ｃを通る直線なので，点Ｃの座標がわかると連立方程式で求めることができます。（(2) と同じ解き方）

そこで，まず点Ｃの座標を求めます。

直線ＯＢは$y=2\chi$で，点Ｃはこの上にあるから点Ｃのχ座標をｔとするとｙ座標は２ｔ。よって，Ｃ（ｔ，２ｔ）と表すことができる。

また，点Ｃを通って直線②に平行な直線をひき，これを②’とする。直線②’を$y=\chi+b$（②と平行だから傾き$a=1$）と置くと，これは点Ｃ（ｔ，２ｔ）を通るから，$2t=t+b$より$b=t$，よって$y=\chi+t$となり，②’とｙ軸との交点のｙ座標はｔとなる。



三角形の面積は底辺と高さを使って求めるが，△ＡＢＣは底辺や高さを求めることができないので，面積が等しくて，底辺・高さを求めることができる三角形に等積変形をします。

直線②’とｙ軸との交点をＤとします。

②//②’より，ＡＢを共通の底辺として，△ＡＢＣ＝△ＡＢＤから，△ＡＢＤの面積をｔを使って表し，これを２１と置き，この方程式を解いて，ｔの値を求めます。

△ＡＤＥ＋△ＢＥＤ＝△ＡＢＤ（＝△ＡＢＣ）より，

$(6-t)\times3\div2+(6-t)\times6\div2=21$より，これを解いて$t=\frac{4}{3}$，$2t=\frac{8}{3}$。

ここから，Ｃの座標は$\left(\frac{4}{3},\ \frac{8}{3}\right)$となります。

最後に，点Ａと点Ｃを通る直線ℓの式を求めます。

Ａ（－３，３），Ｃ$\left(\frac{4}{3},\ \frac{8}{3}\right)$だから，

求める直線 ℓ の式を $y=a\chi+b$ とすると

$$3=-3a+b \cdots [1]$$

$$\frac{8}{3}=\frac{4}{3}a+b \quad より \quad 8=4a+3b \cdots [2]$$

[1]×3－[2]

$$\begin{array}{rl} & 9=-9a+3b \\ -) & 8=\ \ 4a+3b \\ \hline & 1=-13a \end{array}$$

$$-\frac{1}{13}=a \quad \cdots [3]$$

[3]を[1]に代入して，

$$3=-3\times\left(-\frac{1}{13}\right)+b \quad より，\ b=\frac{36}{13}$$

よって，求める直線 ℓ の式は，$y=-\frac{1}{13}\chi+\frac{36}{13}$

答　$y=-\frac{1}{13}\chi+\frac{36}{13}$

★

＊(3) は複雑なプロセスになっていますが，三角形の面積が与えられているので，点Ｃの座標をｔを使って表し，そのｔを使って三角形の面積を表し，等号で置く，という作業をしただけです。

その際，与えられた三角形の面積は計算できないので，計算ができるような形に等積変形します。

２次関数で，三角形の面積が定数で与えられた問題はほとんどがこのような等式変形を使って面積を求めることができる形に変形する，という解き方をします。

非常にポピュラーな問題なので，受験用の問題集ならどんなものにも載っています。類題をやることで本当に解き方を理解できます。数題，解いてみるといいでしょう。

To Top Page