

質問へのお答え

数専ゼミ数学教育研究所・通信教育指導部

質問の内容

図で、四角形 $ABCD$ は $\angle ABC = 60^\circ$ の平行四辺形、 E は $\angle BAD$ の二等分線と辺 CD との交点である。点 B から線分 AE にひいた垂線と線分 AE との交点を F とする。 $CE = 3\text{ cm}$ 、 $EF = 2\text{ cm}$ 、 $BC = 7\text{ cm}$ のとき次の問いに答えなさい。

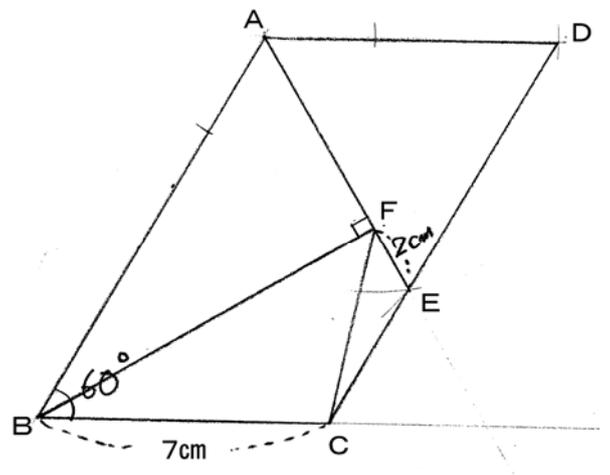
(問) $\triangle FBC$ の面積は平行四辺形 $ABCD$ の面積の何倍か、求めなさい。

質問へのお答え

ご質問ありがとうございます。以下のように解いてみました。

[答 案]

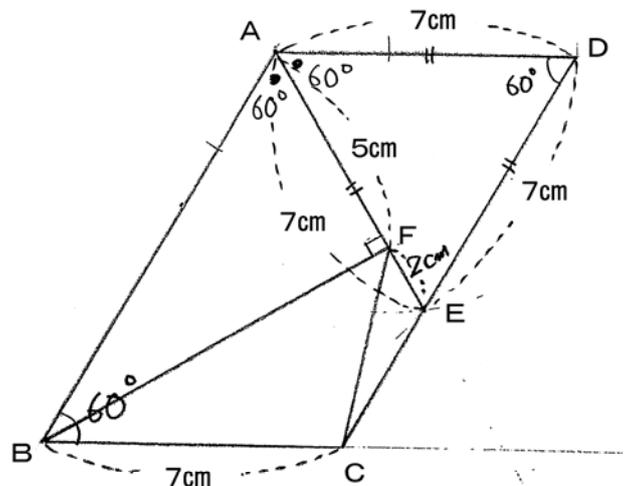
図の添付がありませんでしたので与えられた問題の条件から、右のような図を想定して解いてみました。



問題で与えられた条件から導き出せる辺の長さは、右の図のようになります。

ここでは $\triangle AED$ が1辺が 7 cm の正三角形になることを押さえることがポイントになります。

[図 1]



AEを延長した直線とBCを延長した直線の交点をGとします。

AED GEC (2角相当) より,

- ・ ECGが正三角形であること
- ・ ABGが正三角形であること

を押さえます。

BGAにおいて,

BGAが二等辺三角形であることから
頂点Bから底辺GAに引いた垂線は底辺GAを二等分するから, $FA = 5\text{cm} = FG$

よって $AG = AB = BG = 10\text{cm}$

平行四辺形の対辺の長さは等しいから

$AB = DC = 10\text{cm}$

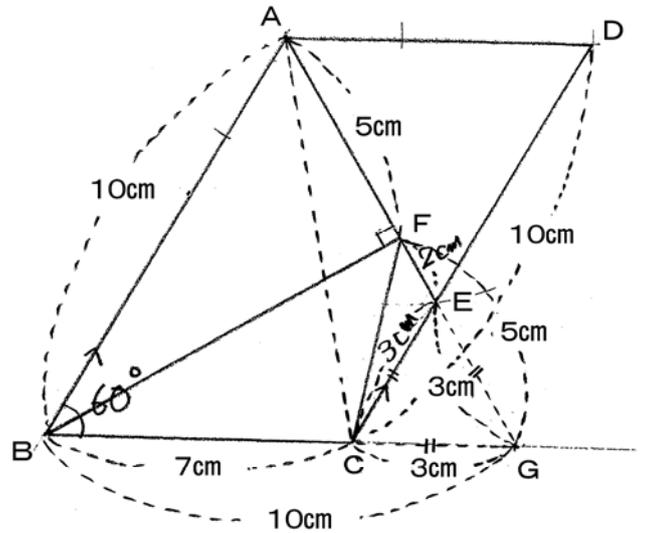
また, $EG = FG - FE$

$$= 5\text{cm} - 2\text{cm} = 3\text{cm}$$

より, $EG = EC = CG = 3\text{cm}$

以上が, 右図のデータの説明です。

[図 2]



[図 3]

- 1 ECG = tとおきます。
- 2 CGFで, 点Cを共通頂点として
CGEと CEFで
面積は底辺の比に比例するから
 $t : CEF = 3 : 2$

$$CEF = \frac{2}{3} t$$

- 3 AED GECより,
相似比が7 : 3だから
面積比は $7^2 : 3^2$ で,
 $AED : t = 7^2 : 3^2$ より,

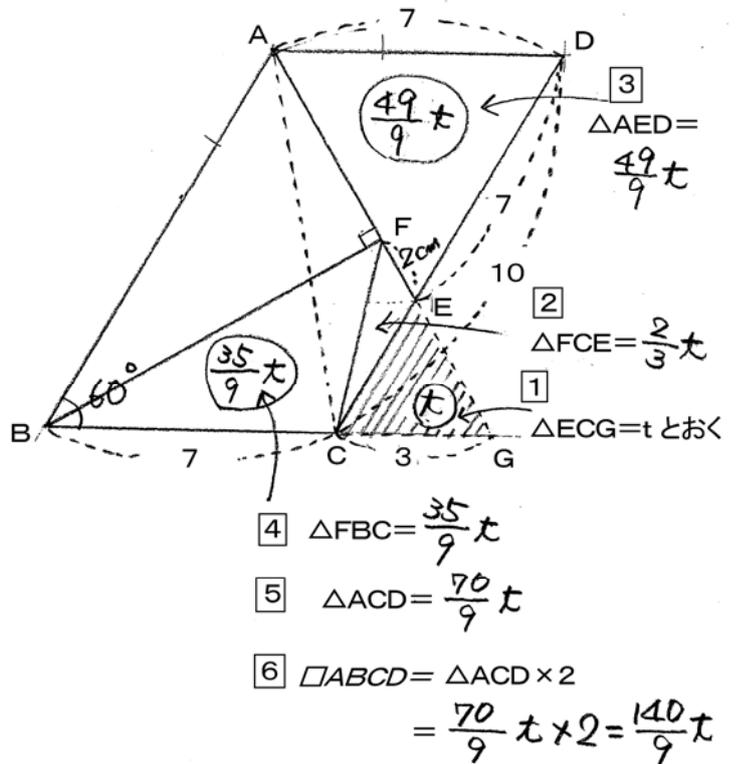
$$AED = \frac{49}{9} t$$

- 4 FCG = CEF + CGE
 $= \frac{2}{3} t + t = \frac{5}{3} t$

FBCで, 点Fを共通頂点として
FBCと FCGで
面積は底辺の比に比例するから

$$FBC : \frac{5}{3} t = 7 : 3$$

$$FBC = \frac{35}{9} t$$



【注】 でかこった番号は, 考える順序を表します。

5 \square $A C D$ で、点 A を共通頂点として

$A C D$ と $A E D$ で

面積は底辺の比に比例するから

$$A C D : \frac{49}{9} t = 10 : 7 \quad \text{より,} \quad A C D = \frac{70}{9} t$$

6 \square $A B C D = A C D \times 2$

$$= \frac{70}{9} t \times 2 = \frac{140}{9} t$$

よって, $F B C \div A B C D$

$$= \frac{35}{9} t \div \frac{140}{9} t = \frac{35 t}{9} \times \frac{9}{140 t} = \frac{1}{4}$$

答 [$\frac{1}{4}$ 倍]

三角形や平行四辺形の面積の問題は、上のように、共通頂点を見つけ、「面積は底辺の比に比例する」という性質を使い、比例式を立てこれと解いて必要な面積を求めていく操作を繰り返し、問題として問われている面積の比を求める、というプロセスをとるのが「定石」です。

問題とされる図形の面積比を求める途中で、いくつかの図形の面積比を求めなくてはならないのがこの種の問題のおもしろさ・楽しさであるとともに困難さでもあります。

ある程度、似たような問題をやっていると、「あっ、またあの手だ！」と気づきます。いろいろな問題をやってみて下さい。

なお、上の解法は、比を文字を導入して量(面積)として扱い、途中では面積を求める操作を行い最後に求めた面積を比に直す、という手法です。(もっとも、面積÷面積を計算することで、自動的に面積の比が出てくるのですが...)

このように比を量の関係として追っていくと、辺の長さや面積の比が混乱しません。

ご質問、ありがとうございました。また、ご質問下さい。